5.5.3 Forme normale de Chomsky

5.5.3.1 Définition

Une grammaire algébrique est dite sous *forme normale de Chomsky*, ou *quadratique* si toutes les productions de P sont de l'une des deux formes suivantes :
- $A \longrightarrow BC$, avec $A, B, C \in V$
- $A \longrightarrow a$, avec $A \in V$ et $a \in X$

C'est donc une grammaire ε-libre.

5.5.3.2 Algorithme

Algorithme de passage d'une grammaire propre à une grammaire quadratique (si elle n'est pas propre, en particulier si elle contient des productions singulières, appliquer l'agorithme précédente)

- On conserve les productions de la forme $A \longrightarrow BC$
  $A \longrightarrow a$
  $S \longrightarrow \varepsilon$[1]
- Les autres productions sont de la forme
  $A \longrightarrow X_1 X_2 \dots X_k$, avec $k > 2$ et les $X_i \in (X \cup V)^*$.[2]

  On remplace toute règle de ce type par l'ensemble des productions

$$\begin{array}{ccl} A & \longrightarrow & X'_1 \langle X_2 \dots X_k \rangle \\ \langle X_2 \dots X_k \rangle & \longrightarrow & X'_2 \langle X_3 \dots X_k \rangle \\ & \vdots & \\ \langle X_{k-1} X_k \rangle & \longrightarrow & X'_{k-1} X_k \end{array}$$

où $X'_i = X_i$ si $X_i \in V$, sinon on ajoute $X'_i \longrightarrow X_i$.

5.5.3.3 Exemple

Soit la grammaire $S \to 0\,S\,1 \mid 0\,1$.

La grammaire suivante est quadratique et reconnaît le même langage :

$$\begin{array}{ll} S & \to 0' \langle S\,1 \rangle \\ 0' & \to 0 \\ \langle S\,1 \rangle & \to S 1' \\ 1' & \to 1 \\ S & \to 0'\,1' \end{array}$$

Il est préférable de renommer les non-terminaux en fin d'algorithme :

$$\begin{array}{l} S \to AB \\ A \to 0 \\ B \to SC \\ C \to 1 \\ S \to AC \end{array}$$

5.5.4 Exercice

Trouver une grammaire quadratique équivalente à la grammaire suivante :

$$\begin{array}{l} S \to aAB \mid B\,A \\ A \to BBB \mid a \\ B \to AS \mid b \end{array}$$

[1] Si la grammaire est ε-libre, il peut demeurer une production de la forme $S \to \varepsilon$, avec S inaccessible.
[2] La grammaire de départ étant propre, il n'y a pas de productions singulières.