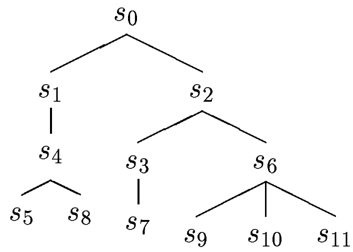
6.1.1 Arbre et hauteur



Déf. 1 (Arbre)

Soit S un ensemble fini de *sommets*, $r \in S$ un sommet distingué appelé *racine*. Un arbre $\mathcal{A}$ est la donnée de $\langle S, r, A \rangle$ où $A \subset S \times S$, (ensemble d'arcs), tel que tout sommet $s \neq r$ de S est relié par un arc à un autre sommet p appelé *père* de s :

$$\forall s \in S, s \neq r, \exists p \in S \;/\; (p, s) \in A$$

Un arbre est ainsi qualifié de *connexe* car tout sommet est « reliable » à la racine.

Déf. 2 (Arbre —récursif)

- Si r est un sommet, $\mathcal{A} = \langle \{r\}, r, \emptyset \rangle$ est un arbre.
- Soient $\mathcal{A}_1 = \langle S_1, r_1, A_1 \rangle$, $\mathcal{A}_2 = \langle S_2, r_2, A_2 \rangle$, ..., $\mathcal{A}_n = \langle S_n, r_n, A_n \rangle$ des arbres (avec $S_i \cap S_j = \emptyset$, $\forall i, j \in [1, n]$).
  Alors $\mathcal{A} = \langle S, r_0, A \rangle$ est un arbre, avec
  - $S = \bigcup_{i \in [1,n]} S_i$ *S est la réunion des sommets*
  - $r_0 \notin S_i$ *r_0 est un nouveau sommet*
  - $A = \bigcup_{i \in [1,n]} A_i \cup \{(r_0, r_1), (r_0, r_2), ..., (r_0, r_n)\}$ *il y a un arc de la nouvelle racine vers les racines de tous les $\mathcal{A}_i$*

Déf. 3 (Terminologie)

Arc : $(x, y) \in A$.
  x est ***père*** de y (unique).
  y est ***fils*** de x (non unique).
Feuille : sommet sans fils
Nœud (sommet interne/branchant) : sommet avec fils
Chemin : suite d'arcs « de père en fils »
Branche : chemin de la racine à une feuille
Hauteur : longueur (nombre d'*arcs*) de la plus longue branche

Déf. 4 (Hauteur –récursif)

Soit $\mathcal{A} = \langle S, r, \varphi \rangle$.

La hauteur de $\mathcal{A}$ vaut : $\begin{cases} 0 & \text{si } |S| = 1 \\ M+1 & \text{sinon} \\ & \text{où } M \text{ est le maximum des hauteurs des sous-arborescences issues des fils de la racine} \end{cases}$

6.1.2 Autres définitions

Arborescence

Déf. 5 (Arborescence)

Soit S un ensemble fini de sommets, $r \in S$ un sommet distingué appelé *racine*,
φ une application de S dans l'ensemble des parties de S.
Une arborescence est la donnée de $\langle S, r, \varphi \rangle$ telle que :

$$\forall s \in S \ \ \exists! s_1, s_2, ...s_p \text{ tq } s_1 = r, s_p = s \text{ et } s_{i+1} \in \varphi(s_i) \text{ pour } i \in [1, p]$$

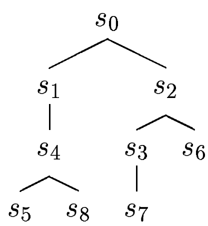
On appelle une telle suite un *chemin*, de longueur $p - 1$.

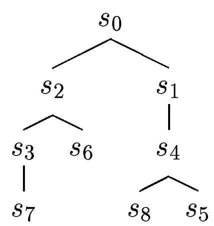
Exemple : $S = \{s_0, s_1, s_2...s_8\}$, $r = s_0$. Notation : $s_b \in \varphi(s_a)$ est représenté par l'arc 

φ :

s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
s_1	s_4	s_3	s_7	s_5				
s_2		s_6		s_8				

$$\varphi(s_0) = \{s_1, s_2\}$$
$$\varphi(s_1) = \{s_4\}$$

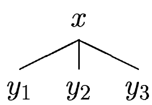




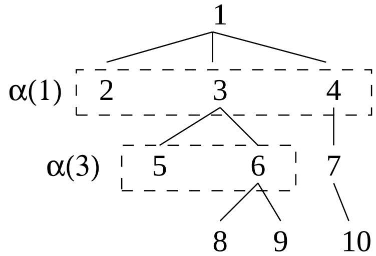
Arbre et primitives

Déf. 6 (Arbre)

Soit S un ensemble fini de sommets, $r \in S$ un sommet distingué appelé *racine*, α une application de S dans S^*.
Un arbre est la donnée de $\langle S, r, \alpha \rangle$.
Un arbre est donc une arborescence munie d'un ordre sur les fils.

Notation : $\alpha(x) = y_1 y_2 y_3$ est représenté par 

Exemple : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $r = 1$.



On peut aussi préférer deux applications de $S \rightarrow S$: premier fils et frère.
$\langle S, r, \alpha \rangle \Leftrightarrow \langle S, r, pf, fr \rangle$.