Rappel On se donne un modèle $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire un domaine D et un ensemble d'ensembles), et une fonction d'interprétation I pour les « constantes non logiques » (constantes individuelles et noms de prédicats). On introduit une fonction de valuation, V qui associe 1 ou 0 à toute formule. V dépend de I, c'est-à-dire du modèle.

Le calcul de la valeur sémantique d'une formule φ dans un modèle $\mathcal{M}$ consiste à calculer $V_{\mathcal{M}}(\varphi)$.

- Si P est un symbole de prédicat, c_1, c_2, ..., c_k des constantes, alors $V_{\mathcal{M}}(P(c_1, c_2, ..., c_k)) = 1$ ssi $\langle I(c_1), I(c_2), ..., I(c_k)\rangle \in I(P)$.
- Si φ et ψ sont des formules, $V_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$
  $V_{\mathcal{M}}(\varphi \wedge \psi) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ et $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
  $V_{\mathcal{M}}(\varphi \vee \psi) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ ou $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
  $V_{\mathcal{M}}(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$ ou $V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$
  $V_{\mathcal{M}}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = V_{\mathcal{M}}(\psi)$

Interprétation des formules avec quantificateur

(17) a. Quelqu'un entre
b. $\exists x E(x)$

La formule (17b) est vraie s'il existe un individu dans le modèle qui appartient à l'extension du prédicat. Autrement dit, si on trouve un individu, soit d, tel que $V_{\mathcal{M}}(E(d)) = 1$.

Pour formuler rigoureusement cet aspect, on suppose une fonction, qu'on appelle *assignement* (affectation) qui associe à chaque variable du langage un individu du domaine. L'interprétation d'une formule dépend donc dorénavant (1) du modèle et (2) de la fonction d'assignation g que l'on choisit.

On introduit la notion de *dénotation* d'un *terme* (constante ou variable)[1] :
$[\![\mathrm{t}]\!]_{\mathcal{M},g} = I(t)$ si t est une constante
$[\![\mathrm{t}]\!]_{\mathcal{M},g} = g(t)$ si t est une variable

Quelle est la règle pour $V(\exists x\varphi)$? Prenons un exemple, avec une variable libre dans φ : Soit la formule $\exists y\ P(x, y)$. x est libre dans cette formule. Supposons que $P(x, y)$ s'interprète « x possède y ». Pour un assignement g, la dénotation de x est, par définition, $g(x)$. Donc $\exists y\ P(x, y)$ signifie « $g(x)$ possède quelque chose ».

On pourrait donc proposer une définition qui serait :
$$V_{\mathcal{M},g}(\exists y\ P(x, y)) = 1 \text{ ssi } \exists d \in D \text{ tq } \langle g(x), d\rangle \in I(P).$$

Mais cette définition ne peut être généralisée telle quelle : elle ne permet pas de définir la valuation de $\exists x\varphi$ à partir de celle de φ : en effet, on ne peut pas prendre
$V_{\mathcal{M},g}(\exists y\ P(x, y)) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M},g}(P(x, y)) = 1$ car cela signifie $\langle g(x), g(y)\rangle \in P$.
Or l'individu associé par g à y n'est pas nécessairement celui que $g(x)$ possède.

On suppose qu'il existe un assignement g' qui diffère de g seulement pour y, auquel il assigne précisément l'individu d possédé par $g(x)$. Alors cette fois, on peut écrire $V_{\mathcal{M},g}(\exists y\ P(x, y)) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M},g'}(P(x, y)) = 1$ On introduit la notation : $g[y/d]$ = assignement g, sauf pour $y \mapsto d$.

Alors : $\boxed{V_{\mathcal{M},g}(\exists y\ \varphi) = 1 \text{ ssi il existe un } d \in D \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1}$

de même, $\boxed{V_{\mathcal{M},g}(\forall y \phi) = 1 \text{ ssi pour tout } d \in D,\ V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\phi) = 1}$

[1] On doit alors ré-écrire la règle de calcul : $V_{\mathcal{M},g}(\mathrm{P}(\mathrm{t}_1, ... \ t_n)) = 1$ ssi $\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},g}, ...[\![t_n]\!]_{\mathcal{M},g}\rangle \in I(P)$.