1.2 Exercices de rappel

1.2.1 Expressions rationnelles

Définition

Déf. 4 (Opérations sur les langages)

On peut définir deux opérations binaires et une opération unaire sur les langages :
– L'*union* des langages est définie comme d'habitude (union ensembliste)
– Le *produit* des langages est défini de la manière suivante (on suppose l'opération de concaténation définie) : $L_1.L_2 = \{uv \,/\, u \in L_1 \text{ et } v \in L_2\}$
– L'*étoile* (ou fermeture) d'un langage est définie de la manière suivante :
En généralisant, on peut proposer la notation

$$\begin{array}{lcl} A^0 & = & \{1\!\!1_X\} \\ A^1 & = & A \\ A^{i+1} & = & A.A^i \end{array}$$

d'où :
Avec $A^n = \{a_1...a_n \,/\, a_i \in A\}$ on définit l'*étoile* de A : $A^* = \bigcup_{n\geq 0} A^n$

Déf. 5 (Expression rationnelle)

Soit X un alphabet. On définit les expressions rationnelles récursivement de la façon suivante :
– Pour tout $x \in X$, x est une expression rationnelle
– ε est une expression rationnelle
– Si φ et ψ sont des expressions rationnnelles, alors
  – $(\varphi|\psi)$,
  – $(\varphi.\psi)$,
  – et φ^* sont des expressions rationnelles.

Remarque : la définition précédente décrit un **langage** sur l'alphabet formé des symbole de X plus $\{(,),|,.,*\}$. Plus précisément, on définit ainsi une **syntaxe**. Il faut donner une **sémantique** à ces expressions :
– Pour tout $x \in X$, l'e.r. x dénote le langage $\{x\}$,
– L'e.r. ε dénote le langage $\{\varepsilon\}$,
– Si φ et ψ sont des expressions rationnnelles, alors
  – l'e.r. $(\varphi|\psi)$ dénote l'union des langages dénotés par φ et ψ ;
  – l'e.r. $(\varphi.\psi)$ dénote le produit des langages dénotés par φ et ψ ;
  – et l'e.r. φ^* dénote l'étoile du langage dénoté par φ.

Exercices

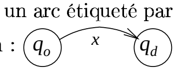
Notation : e_i est une expression rationnelle, et L_i est le langage correspondant à e_i.

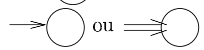
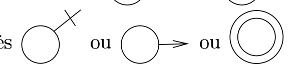
1. Soit $e_1 = a^*b^*$. Décrire L_1.
2. Soient $e_2 = a(ba)^*$ et $e'_2 = (ab)^*a$. A-t-on $L_2 \subset L'_2$? $L'_2 \subset L_2$?
3. Soit $L_3 = \{ab, bba, acba, babb, ccacc\}$. Donner e_3.
4. Soit $L_4 = \{u \in X^* / |u|_a = 2k, k \in \mathbb{N}\}$. Donner e_4.
5. Soit $e_5 = a(b|c)^*(a^*|aa^*)ba(a^*|b^*|c^*)^*$. Peut-on simplifier e_5 ?
6. Soit $e_6 = (((a|\varepsilon)|b(ac)^*c)|(b^*c|\varepsilon))$. Trouver une expression e'_6 qui décrit le même langage et ne comprend pas le symbole ε.
7. Soit $e_7 = (a|b|c)(a|b|c)^*$. Y a-t-il une différence entre L_7 et $\{a, b, c\}^*$?

1.2.2 Automates

Definition

Déf. 6 (Automate)

Un *automate à états finis* est la donnée du quintuplet $\langle X, Q, T, I, F\rangle$:
– X est un ensemble fini de symboles (alphabet)
– Q est un ensemble fini d'états
– T est un ensemble de transitions :
$T \subset Q \times X \times Q$. Une transition (q_o, x, q_d) est un arc étiqueté par x entre un état origine q_o et un état destination q_d. Notation : 

– I est un ensemble d'états dits *initiaux* ($I \subset Q$), notés 
– F est un ens. d'états dits *finaux* ($F \subset Q$), notés 

Exercices

1. Proposer un automate pour chaque expression rationnelle des exercices précédents.
2. Soit $L_2 = \{ab^na, n \geq 0\}$. Donnez A_2.
3. Soit $L_3 = \{aa, ab, abb, acba, accb\}$. Donnez A_3.
4. Soit $L_4 = \{$constantes réelles en C$\}$ $(X = \{0, 1, 2..., 9, \bullet, +, -, E\})$. Donnez A_4.
5. Soit $L_5 = \{$mots comprenant au moins un a et un $b\}$. Donnez A_5.