A.1 Logique propositionnelle

1. Reprendre la formule (8), p. 7. Représenter son arbre de décomposition. Au vu de cet arbre, quels sont les différents ordres possibles de calcul des colonnes de la table composite ?
2. Reprendre la formule (9), et calculer sa table de vérité composite en écrivant une colonne par sous-formule (1re méthode).
3. Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules bien formées de L_p ?

(1)	$\neg(\neg P \vee Q)$	(5)	$(P \rightarrow ((P \rightarrow Q)))$	(9)	$(P \vee (Q \vee R))$
(2)	$P \vee (Q)$	(6)	$((P \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow Q))$	(10)	$-P \vee Q \vee R$
(3)	$\neg(Q)$	(7)	$((P_{28} \rightarrow P_3) \rightarrow P_4)$	(11)	$(\neg P \vee \neg\neg P)$
(4)	$(P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)))$	(8)	$(P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$	(12)	$(P \vee P)$

4. Montrer que, quelles que soient φ, ψ et χ, les paires de formules suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

(1)	$\neg\neg\varphi$	φ	
(2)	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi \vee \psi$	
(2')	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	
(3)	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	contraposition
(4)	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$	
(5)	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	
(6)	$\varphi \vee \varphi$	φ	idempotence
(7)	$\varphi \wedge \varphi$	φ	”
(8)	$\varphi \vee \psi$	$\psi \vee \varphi$	commutativité
(9)	$\varphi \wedge \psi$	$\psi \wedge \varphi$	”
(10)	$\varphi \vee (\psi \vee \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \vee \chi$	associativité
(11)	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$	”
(12)	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	distributivité
(13)	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	”
(14)	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	lois de Morgan
(15)	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	”

5. Utilisez les résultats de l'exercice 4 pour (dé)montrer les équivalences suivantes (où $\equiv$ note l'équivalence logique).

(1)	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\equiv$	$\psi \leftrightarrow \varphi$
(2)	$\varphi \rightarrow \neg\varphi$	$\equiv$	$\neg\varphi$
(3)	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$\equiv$	$\chi \wedge (\varphi \wedge \psi)$
(4)	$\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	$\equiv$	$\varphi \rightarrow \psi$
(5)	$(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$	$\equiv$	$(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)$
(6)	$\varphi \rightarrow (\psi \wedge \chi)$	$\equiv$	$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi)$
(7)	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	$\equiv$	$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$

6. Calculez la valeur de vérité des phrases suivantes dans chacune des situations proposées (attention, certaines phrases sont ambiguës ; vous proposerez plusieurs analyses quand c'est nécessaire).

(18) a. Jean a réussi son examen ou Marie est contente
b. Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
c. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen et Marie est contente
d. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen ou il n'est pas vrai que Marie est contente
e. Si Jean a réussi son examen, il n'est pas vrai que Marie est contente

f. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen si Marie est contente

Situations : (19) a. Jean a réussi son examen, Marie est contente
b. Jean a réussi son examen, Marie n'est pas contente
c. Jean n'a pas réussi son examen, Marie est contente

7. Montrez que (1) implique logiquement (2) et que (3) et (4) sont logiquement équivalentes.
   (1) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
   (2) Il n'est pas vrai que Marie est contente
   (3) Marie est contente si Jean a réussi son examen
   (4) Marie est contente ou il n'est pas vrai que jean a réussi son examen
8. Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase correspond chaque variable propositionnelle.
   (1) Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup
   (2) Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient
   (3) Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant
   (4) Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture
   (5) Jean ne viendra que si Paul ne vient pas
   (6) Si tu ne m'aides pas quand j'ai besoin de toi,
   je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi
9. Montrer que les connecteurs $\wedge$ et $\neg$ sont suffisants, c'est-à-dire que toute formule comprenant d'autres connecteurs ($\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) est équivalente à une formule ne comprenant que $\wedge$ et $\neg$.
10. *Le prince Beaudiscours est dans un cruel embarras. Le voici au pied du manoir où la fée Antinomie retient prisonnière la douce princesse Vérité.*

    Deux portes donnent accès au château. L'une conduit aux appartements de la princesse, l'autre s'ouvre sur l'antre d'un dragon.

    Le prince sait seulement que l'un de ces portes s'ouvre si on énonce une proposition vraie, et l'autre si on énonce une proposition fausse.

    Comment le prince peut-il délivrer la princesse ?

    Indice : la logique propositionnelle peut nous aider à résoudre cette énigme, à condition de considérer les deux propositions suivantes.
    P = la porte de droite mène aux appartements de la princesse ;
    Q = la porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie.
    Chacune de ces propositions peut être vraie ou fausse. En considérant tous les cas possibles, on peut trouver la proposition que notre prince doit énoncer.

A.2 (Quelques) corrigés

– $\boxed{\text{n° 8, p 15}}$

(20) Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup

$\neg$ P $\wedge$ Q ; P = « ce moteur est bruyant » ; Q = « ce moteur consomme beaucoup »

(21) Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient

$\neg((Q \vee R) \rightarrow P)$; P = « Pierre vient » ; Q = « Marie vient » ; R = « Jean vient »

(22) Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant

$P \wedge Q$; P = « Jean est stupide » ; Q = « Jean est méchant »

(23) Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture

$P \vee Q \vee R \vee S$; var : $(P \vee Q) \wedge (R \veebar S)$
P = « Je vais à la plage à pied » ;
Q = « Je vais à la plage en voiture » ;
R = « Je vais au cinéma à pied » ;
S = « Je vais au cinéma en voiture »

(24) Jean ne viendra que si Paul ne vient pas

P = « Jean viendra » ; Q = « Paul vient »
La négation complique les choses. Raisonnons avec un autre exemple : « Jean ne viendra que s'il fait beau »
4 cas : Jean vient et il fait beau
Jean vient et il ne fait pas beau OUT !
Jean ne vient pas et il fait beau
Jean ne vient pas et il ne fait pas beau
Donc ici, c'est 'jean vient' → 'il fait beau' Si on revient là haut, on a : $P \to \neg Q$

(25) Si tu ne m'aides pas quand j'ai besoin de toi, je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi

$\neg P \to \neg Q$;
P = « tu m'aides quand j'ai besoin de toi » Q = « je t'aide quand tu as besoin de moi »

– $\boxed{\text{n° 9, p 15}}$
Pour chaque formule $\sigma = \varphi \odot \psi$, où $\odot$ désigne un connecteur différent de $\wedge$ et $\neg$, il faut (et il suffit) de trouver une formule équivalente σ' ne comprenant que les connecteurs $\wedge$ et $\neg$. Alors pour toute formule dont $\sigma = \varphi \odot \psi$ est une sous-formule, on peut trouver une formule équivalente en remplaçant σ par une formule équivalente σ' comprenant seulement les connecteurs $\wedge$ et $\neg$.
Pour démontrer l'équivalence, il faut passer par la table de vérité composite.
On a :

$$\begin{array}{lcl}
\varphi \vee \psi & \leftrightarrow & \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\
\varphi \to \psi & \leftrightarrow & \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \\
\varphi \leftrightarrow \psi & \leftrightarrow & (\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \psi)) \\
 & & \neg(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)) \\
 & & \\
\varphi \veebar \psi & \leftrightarrow & (\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi))
\end{array}$$

– $\boxed{\text{n° 10, p 15}}$ Soient P = la porte de droite mène aux appartements de la princesse ; et Q = la porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie. On cherche une formule φ, formée à partir de P et Q, telle que φ est vraie si la situation est favorable, et fausse sinon. On doit considérer toutes les valeurs possibles de P et Q.

P	Q	Favorable	(Interprétation)
0	0	1	(gauche → princesse et gauche ouvre sur V)
0	1	0	(gauche → princesse et droite ouvre sur V)
1	0	0	(droite → princesse et gauche ouvre sur V)
1	1	1	(droite → princesse et droite ouvre sur V)

Il est facile de s'apercevoir qu'il s'agit de la table de vérité de ($\varphi = P \leftrightarrow Q$). Il faut donc que le prince énonce la proposition :

la porte de droite mène aux appartement de la princesse
si et seulement si
elle s'ouvre quand on énonce une proposition vraie