

### 4.3.2 Interprétation

On se donne un modèle  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire un domaine  $D$ , un ensemble d'ensembles, et une fonction d'interprétation  $I^2$ . On introduit une fonction de valuation,  $V$ , qui associe 1 ou 0 à toute formule.  $V$  dépend de  $\mathcal{M}$ .

En excluant les variables et les quantificateurs, on peut proposer les règles suivantes :

- Si  $P$  est un symbole de prédicat,  $c_1, c_2, \dots, c_k$  des constantes, alors
 
$$V_{\mathcal{M}}(P(c_1, c_2, \dots, c_k)) = 1 \text{ ssi } \langle I(c_1), I(c_2), \dots, I(c_k) \rangle \in I(P)$$
- Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des formules,
 
$$V_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$$

$$V_{\mathcal{M}}(\varphi \wedge \psi) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ et } V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$$

$$V_{\mathcal{M}}(\varphi \vee \psi) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ ou } V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$$

$$V_{\mathcal{M}}(\varphi \rightarrow \psi) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0 \text{ ou } V_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$$

$$V_{\mathcal{M}}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \text{ ssi } V_{\mathcal{M}}(\varphi) = V_{\mathcal{M}}(\psi)$$

Avant de proposer des règles pour les formules avec un quantificateur, il faut traiter le cas des formules comprenant des **variables** (libres).

Par exemple, pour connaître la valuation de  $P(x)$ , il faut que  $x$  désigne un individu dans le modèle. Pour formaliser cet aspect, on utilise des fonctions, qu'on appelle *assignment* (affectation) qui associent à chaque variable du langage un individu du domaine. L'interprétation d'une formule comme  $P(x)$  pourra se faire dès lors qu'on disposera d'une telle fonction, soit  $g : V_{\mathcal{M}}(P(x)) = 1$  ssi  $g(x) \in I(P)$ . En toute rigueur, la valuation dépend alors non seulement de  $\mathcal{M}$  (et de  $I$ ) mais aussi de  $g$  :

$$V_{\mathcal{M},g}(P(x)) = 1 \text{ ssi } g(x) \in I(P)$$

Pour formuler facilement les règles, on introduit la notion de *dénotation* d'un *terme* (constante ou variable) :  $\llbracket t \rrbracket_{\mathcal{M},g} = I(t)$  si  $t$  est une constante  
 $\llbracket t \rrbracket_{\mathcal{M},g} = g(t)$  si  $t$  est une variable

On doit alors ré-écrire la première règle de calcul donnée plus haut :

$$V_{\mathcal{M},g}(P(t_1, \dots, t_n)) = 1 \text{ ssi } \langle \llbracket t_1 \rrbracket_{\mathcal{M},g}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_{\mathcal{M},g} \rangle \in I(P).$$

Considérons maintenant les formules formées avec un **quantificateur**. Une définition assez intuitive pourrait être :  $V(\exists x\varphi) = 1$  ssi il existe un individu dans le domaine qui vérifie  $\varphi$ . Mais que signifie ici "vérifier" la formule  $\varphi$ ? On va utiliser pour le préciser la notion d'affectation.

Par exemple, la formule  $\exists xE(x)$  est vraie s'il existe un individu dans le domaine  $D$ , appelons-le  $d$ , tel que, si  $g$  est telle que  $g : x \mapsto d$ , alors  $V_{\mathcal{M},g}(E(x)) = 1$ . En généralisant à partir de cet exemple, on pourrait écrire :

$$V_{\mathcal{M}}(\exists x\varphi) = 1 \text{ ssi il existe } d \in D \text{ et } g : x \mapsto d \text{ tels que } V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1.$$

Mais cette définition n'est pas assez générale : supposons que  $\varphi$  contienne à son tour un autre quantificateur. Alors il faudra trouver un autre fonction,  $g'$ , qui associera la variable en jeu avec l'individu du domaine concerné. La question est alors de régler le lien entre  $g$  et  $g'$ .

Pour cela, on introduit la notation :  $g[y/d]$  = affectation  $g$ , sauf pour  $y \mapsto d$ . Alors on peut écrire :

$$V_{\mathcal{M},g}(\exists y \varphi) = 1 \text{ ssi il existe un } d \in D \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1$$

de même,

$$V_{\mathcal{M},g}(\forall y \varphi) = 1 \text{ ssi pour tout } d \in D, V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1$$

Finalement, si  $\varphi$  est une phrase, son interprétation ne dépend pas de l'affectation  $g$ . Alors on dira, pour toute **phrase**  $\varphi$  :

$$V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ ssi il existe une affectation } g \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1$$

<sup>2</sup> $I$  associe un élément du modèle (individu ou ensemble, selon le cas) à toutes les constantes non logiques du langage (constantes individuelles et noms de prédicats).