## A.2 (Quelques) corrigés

- $\boxed{\text{n}^o \text{ 1, p 14}}$ N.B. : Il arrive que l'on s'abstienne de noter la paire de parenthèse la plus externe ; mais au sens strict, on doit trouver exactement autant de paires de parenthèses qu'il y a de connecteurs binaires.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $\neg(\neg P \vee Q)$ | OUI | (5) | $(P \to ((P \to Q)))$ | NON | (9) | $(P \vee (Q \vee R))$ | OUI |
| (2) | $P \vee (Q)$ | NON | (6) | $((P \to P) \to (Q \to Q))$ | OUI | (10) | $-P \vee Q \vee R$ | NON |
| (3) | $\neg(Q)$ | NON | (7) | $((P_{28} \to P_3) \to P_4)$ | OUI | (11) | $(\neg P \vee \neg\neg P)$ | OUI |
| (4) | $(P_2 \to (P_2 \to (P_2 \to P_2)))$ | OUI | (8) | $(P \to (P \to Q) \to Q)$ | NON | (12) | $(P \vee P)$ | OUI |

- $\boxed{\text{n}^o \text{ 2, p 14}}$
  Pour démontrer que deux formules sont logiquement équivalentes, il suffit de montrer qu'elles ont la même colonne dans la table de vérité composite. Bien entendu, il faut que les colonnes **entières** soient identiques (ce qui signifie alors que les expressions ont les mêmes valeurs dans toutes les situations).
  Par exemple (n° 2) :

| $\varphi$ | $\psi$ | $(\varphi \to \psi)$ | $\neg\varphi$ | $(\neg\varphi \vee \psi)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

- $\boxed{\text{n}^o \text{ 3, p 14}}$
  Pour la première équivalence : $(X \wedge Y) \leftrightarrow (Y \wedge X)$ est une tautologie (ex. précédent, n°9). Donc je peux remplacer $X$ par $(A \to B)$ et $Y$ par $(B \to A)$ sans modifier le caractère tautologique de la première formule (règle de substitution). Par l'équivalence 4 plus haut, je peux remplacer $(A \to B) \wedge (B \to A)$ par $(A \leftrightarrow B)$ (règle de remplacement), la formule résultant étant tautologique. [Il faudrait en toute rigueur ajouter l'étape de remplacement des symboles $\varphi$ et $\psi$ par $A$ et $B$.] Le fait que $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$ est une tautologie démontre l'équivalence recherchée.
- $\boxed{\text{n}^o \text{ 6, p 15}}$

  (20) Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup

  ¬ P ∧ Q ; P = « ce moteur est bruyant » ; Q = « ce moteur consomme beaucoup »

  (21) Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient

  $\neg((Q \vee R) \to P)$ ; P = « Pierre vient » ; Q = « Marie vient » ; R = « Jean vient »

  (22) Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant

  $P \wedge Q$ ; $P$ = « Jean est stupide » ; $Q$ = « Jean est méchant »

  (23) Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture

  $P \vee Q \vee R \vee S$ ; var : $(P \vee Q) \wedge (R \vee\!\vee S)$
  $P$ = « Je vais à la plage à pied » ;
  $Q$ = « Je vais à la plage en voiture » ;
  $R$ = « Je vais au cinéma à pied » ;
  $S$ = « Je vais au cinéma en voiture »

  (24) Jean ne viendra que si Paul ne vient pas

  $P$ = « Jean viendra » ; $Q$ = « Paul vient »
  La négation complique les choses. Raisonnons avec un autre exemple : « Jean ne viendra que s'il fait beau »

| | | |
|---|---|---|
| 4 cas : | Jean vient et il fait beau | |
| | Jean vient et il ne fait pas beau | exclu ! |
| | Jean ne vient pas et il fait beau | |
| | Jean ne vient pas et il ne fait pas beau | |

Donc ici, c'est 'jean vient' $\rightarrow$ 'il fait beau' Si on revient là haut, on a : $P \rightarrow \neg Q$

(25) Si tu ne m'aides pas quand j'ai besoin de toi, je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi

$\neg P \rightarrow \neg Q$ ;
$P =$ « tu m'aides quand j'ai besoin de toi » $Q =$ « je t'aide quand tu as besoin de moi »

– $\boxed{\text{n}^o\ 7,\ \text{p}\ 15}$
Pour chaque formule $\sigma = \varphi \odot \psi$, où $\odot$ désigne un connecteur différent de $\wedge$ et $\neg$, il faut (et il suffit) de trouver une formule équivalente $\sigma'$ ne comprenant que les connecteurs $\wedge$ et $\neg$. Alors pour toute formule dont $\sigma = \varphi \odot \psi$ est une sous-formule, on peut trouver une formule équivalente en remplaçant $\sigma$ par une formule équivalente $\sigma'$ comprenant seulement les connecteurs $\wedge$ et $\neg$.
Pour démontrer l'équivalence, il faut passer par la table de vérité composite.
On a :

$$\begin{array}{lcl}
\varphi \vee \psi & \leftrightarrow & \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\
\varphi \rightarrow \psi & \leftrightarrow & \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \\
\varphi \leftrightarrow \psi & \leftrightarrow & (\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \psi)) \\
 & & \neg(\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)) \\
 & & \\
\varphi \veebar \psi & \leftrightarrow & (\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi))
\end{array}$$

– $\boxed{\text{n}^o\ 8,\ \text{p}\ 15}$ Soient $P =$ la porte de droite mène aux appartements de la princesse ; et $Q$ = la porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie. On cherche une formule $\varphi$, formée à partir de $P$ et $Q$, telle que $\varphi$ est vraie si la situation est favorable, et fausse sinon. On doit considérer toutes les valeurs possibles de $P$ et $Q$.

| $P$ | $Q$ | Favorable | (Interprétation) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | (gauche $\rightsquigarrow$ princesse et gauche ouvre sur V) |
| 0 | 1 | 0 | (gauche $\rightsquigarrow$ princesse et droite ouvre sur V) |
| 1 | 0 | 0 | (droite $\rightsquigarrow$ princesse et gauche ouvre sur V) |
| 1 | 1 | 1 | (droite $\rightsquigarrow$ princesse et droite ouvre sur V) |

Il est facile de s'apercevoir qu'il s'agit de la table de vérité de ($\varphi = P \leftrightarrow Q$). Il faut donc que le prince énonce la proposition :

la porte de droite mène aux appartement de la princesse
si et seulement si
elle s'ouvre quand on énonce une proposition vraie