

## A.1 Logique propositionnelle

1. Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules bien formées de  $L_p$  ?

- |   |   |                                 |
|---|---|---------------------------------|
| (1) $\neg(\neg P \vee Q)$                                       | (5) $(P \rightarrow ((P \rightarrow Q)))$               | (9) $(P \vee (Q \vee R))$       |
| (2) $P \vee (Q)$  | (6) $((P \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow Q))$ | (10) $\neg P \vee Q \vee R$     |
| (3) $\neg(Q)$   | (7) $((P_{28} \rightarrow P_3) \rightarrow P_4)$        | (11) $(\neg P \vee \neg\neg P)$ |
| (4) $(P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)))$ | (8) $(P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$   | (12) $(P \vee P)$               |

2. Montrer que, quelles que soient  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\chi$ , les paires de formules suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

- |      |                                     |  |                |
|------|-------------------------------------|--|----------------|
| (1)  | $\neg\neg\varphi$                   | $\varphi$  |                |
| (2)  | $\varphi \rightarrow \psi$          | $\neg\varphi \vee \psi$  |                |
| (2') | $\varphi \rightarrow \psi$          | $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$                                |                |
| (3)  | $\varphi \rightarrow \psi$          | $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$                             | contraposition |
| (4)  | $\varphi \leftrightarrow \psi$      | $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ |                |
| (5)  | $\varphi \leftrightarrow \psi$      | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$     |                |
| (6)  | $\varphi \vee \varphi$              | $\varphi$  | idempotence    |
| (7)  | $\varphi \wedge \varphi$            | $\varphi$  | "              |
| (8)  | $\varphi \vee \psi$                 | $\psi \vee \varphi$  | commutativité  |
| (9)  | $\varphi \wedge \psi$               | $\psi \wedge \varphi$  | "              |
| (10) | $\varphi \vee (\psi \vee \chi)$     | $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$                                | associativité  |
| (11) | $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ | $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$                            | "              |
| (12) | $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$   | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$             | distributivité |
| (13) | $\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$   | $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$               | "              |
| (14) | $\neg(\varphi \wedge \psi)$         | $\neg\varphi \vee \neg\psi$                                    | lois de Morgan |
| (15) | $\neg(\varphi \vee \psi)$           | $\neg\varphi \wedge \neg\psi$                                  | "              |

3. Utilisez les résultats de l'exercice 2 pour (dé)montrer les équivalences suivantes (où  $\equiv$  note l'équivalence logique).

- |     |  |          |  |
|-----|--|----------|--|
| (1) | $\varphi \leftrightarrow \psi$                   | $\equiv$ | $\psi \leftrightarrow \varphi$                                 |
| (2) | $\varphi \rightarrow \neg\varphi$                | $\equiv$ | $\neg\varphi$  |
| (3) | $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$              | $\equiv$ | $\chi \wedge (\varphi \wedge \psi)$                            |
| (4) | $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ | $\equiv$ | $\varphi \rightarrow \psi$                                     |
| (5) | $(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$           | $\equiv$ | $(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)$    |
| (6) | $\varphi \rightarrow (\psi \wedge \chi)$         | $\equiv$ | $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi)$ |
| (7) | $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$    | $\equiv$ | $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$                       |

4. Calculez la valeur de vérité des phrases suivantes dans chacune des situations proposées (attention, certaines phrases sont ambiguës ; vous proposerez plusieurs analyses quand c'est nécessaire).

- (18) a. Jean a réussi son examen ou Marie est contente  
 b. Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente  
 c. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen et Marie est contente  
 d. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen ou il n'est pas vrai que Marie est contente  
 e. Si Jean a réussi son examen, il n'est pas vrai que Marie est contente  
 f. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen si Marie est contente

- Situations : (19) a. Jean a réussi son examen, Marie est contente  
 b. Jean a réussi son examen, Marie n'est pas contente  
 c. Jean n'a pas réussi son examen, Marie est contente

5. Montrez que (1) implique logiquement (2) et que (3) et (4) sont logiquement équivalentes.
- (1) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
  - (2) Il n'est pas vrai que Marie est contente
  - (3) Marie est contente si Jean a réussi son examen
  - (4) Marie est contente ou il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen
6. Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase correspond chaque variable propositionnelle.
- (1) Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup
  - (2) Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient
  - (3) Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant
  - (4) Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture
  - (5) Jean ne viendra que si Paul ne vient pas
  - (6) Si tu ne m'aides pas quand j'ai besoin de toi,  
je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi
7. Montrer que les connecteurs  $\wedge$  et  $\neg$  sont suffisants, c'est-à-dire que toute formule comprenant d'autres connecteurs ( $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ ) est équivalente à une formule ne comprenant que  $\wedge$  et  $\neg$ .
8. *Le prince Beaudiscours est dans un cruel embarras. Le voici au pied du manoir où la fée Antinomie retient prisonnière la douce princesse Vérité.  
Deux portes donnent accès au château. L'une conduit aux appartements de la princesse, l'autre s'ouvre sur l'ancre d'un dragon.  
Le prince sait seulement que l'un de ces portes s'ouvre si on énonce une proposition vraie, et l'autre si on énonce une proposition fausse.  
Comment le prince peut-il délivrer la princesse ?*

Indice : la logique propositionnelle peut nous aider à résoudre cette énigme, à condition de considérer les deux propositions suivantes.

$P$  = la porte de droite mène aux appartements de la princesse ;

$Q$  = la porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie.

Chacune de ces propositions peut être vraie ou fausse. En considérant tous les cas possibles, on peut trouver la proposition que notre prince doit énoncer.