## A.2 (Quelques) corrigés

- $\boxed{\text{n}^o\text{ 1, p 14}}$ N.B. : Il arrive que l'on s'abstienne de noter la paire de parenthèse la plus externe ; mais au sens strict, on doit trouver exactement autant de paires de parenthèses qu'il y a de connecteurs binaires.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $\neg(\neg P \vee Q)$ | OUI | (5) | $(P \to ((P \to Q)))$ | NON | (9) | $(P \vee (Q \vee R))$ | OUI |
| (2) | $P \vee (Q)$ | NON | (6) | $((P \to P) \to (Q \to Q))$ | OUI | (10) | $-P \vee Q \vee R$ | NON |
| (3) | $\neg(Q)$ | NON | (7) | $((P_{28} \to P_3) \to P_4)$ | OUI | (11) | $(\neg P \vee \neg\neg P)$ | OUI |
| (4) | $(P_2 \to (P_2 \to (P_2 \to P_2)))$ | OUI | (8) | $(P \to (P \to Q) \to Q)$ | NON | (12) | $(P \vee P)$ | OUI |

- $\boxed{\text{n}^o\text{ 2, p 14}}$
  Pour démontrer que deux formules sont logiquement équivalentes, il suffit de montrer qu'elles ont la même colonne dans la table de vérité composite. Bien entendu, il faut que les colonnes **entières** soient identiques (ce qui signifie alors que les expressions ont les mêmes valeurs dans toutes les situations).
  Par exemple (n° 2) :

| $\varphi$ | $\psi$ | $(\varphi \to \psi)$ | $\neg\varphi$ | $(\neg\varphi \vee \psi)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

- $\boxed{\text{n}^o\text{ 3, p 14}}$
  Pour la première équivalence : $(X \wedge Y) \leftrightarrow (Y \wedge X)$ est une tautologie (ex. précédent, n°9). Donc je peux remplacer $X$ par $(A \to B)$ et $Y$ par $(B \to A)$ sans modifier le caractère tautologique de la première formule (règle de substitution). Par l'équivalence 4 plus haut, je peux remplacer $(A \to B) \wedge (B \to A)$ par $(A \leftrightarrow B)$ (règle de remplacement), la formule résultant étant tautologique. [Il faudrait en toute rigueur ajouter l'étape de remplacement des symboles $\varphi$ et $\psi$ par $A$ et $B$.] Le fait que $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$ est une tautologie démontre l'équivalence recherchée.
- $\boxed{\text{n}^o\text{ 5, p 14}}$

(20) Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup

¬ P ∧ Q ; P = « ce moteur est bruyant » ; Q = « ce moteur consomme beaucoup »

(21) Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient

$\neg((Q \vee R) \to P)$ ; P = « Pierre vient » ; Q = « Marie vient » ; R = « Jean vient »

(22) Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant

$P \wedge Q$ ; $P$ = « Jean est stupide » ; $Q$ = « Jean est méchant »

(23) Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture

$P \vee Q \vee R \vee S$ ; var : $(P \vee Q) \wedge (R \vee\!\vee S)$
$P$ = « Je vais à la plage à pied » ; $R$ = « Je vais au cinéma à pied » ;
$Q$ = « Je vais à la plage en voiture » ; $S$ = « Je vais au cinéma en voiture »

(24) Jean ne viendra que si Paul ne vient pas

$P \to \neg Q$ ; $P$ = « Jean viendra » ; $Q$ = « Paul vient »

(25) Si tu ne m'aides pas quand j'ai besoin de toi, je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi

$\neg P \to \neg Q$ ;
$P$ = « tu m'aides quand j'ai besoin de toi » $Q$ = « je t'aide quand tu as besoin de moi »