

1.1 Rappels de théorie des ensembles

Déf. 1 (Ensemble, élément)

Un *ensemble* est entièrement défini par les *éléments* qui le constituent.

Déf. 2 (Appartenance, inclusion)

Soit un ensemble $\mathcal{E} = \{a, b, c, d, e\}$. Alors on dit que a (b, c, \dots) *appartient* à \mathcal{E} , ce qui est noté $a \in \mathcal{E}$.

Si un ensemble \mathcal{E} contient tous les éléments d'un ensemble \mathcal{F} , on dit que \mathcal{F} est *inclus* dans \mathcal{E} , ce qui est noté $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. On dit que aussi \mathcal{F} est un *sous-ensemble* de \mathcal{E} .

Bien noter la différence entre l'appartenance (qui relie un élément à un ensemble qui le contient) et l'inclusion (qui relie deux ensembles).

Déf. 3 (Extension, compréhension, propriété caractéristique)

Un ensemble peut être défini en donnant la liste exhaustive de ses éléments. On parle alors de *définition en extension*.

On peut aussi définir un ensemble en indiquant une *propriété* que vérifient tous les éléments de l'ensemble, et aucun autre. Une telle propriété est dite *propriété caractéristique*, et elle permet une *définition en compréhension* (ou en *intension*) de l'ensemble.

Déf. 4 (Opérations ensemblistes)

intersection $x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ si et seulement si $x \in \mathcal{E}$ **et** $x \in \mathcal{F}$

union $x \in \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ si et seulement si $x \in \mathcal{E}$ **ou** $x \in \mathcal{F}$

différence (ensembliste) $x \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ si et seulement si $x \in \mathcal{A}$ et $x \notin \mathcal{B}$

complémentaire $x \in \mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ si et seulement si $x \notin \mathcal{E}$

Cette définition du complémentaire repose implicitement sur l'existence d'un sur-ensemble de \mathcal{E} , soit \mathcal{U} . Alors on peut aussi définir le complémentaire au moyen de la différence ensembliste : $\mathcal{C}_{\mathcal{E}} = \mathcal{U} \setminus \mathcal{E}$

Déf. 5 (Parties, ensemble vide)

Par définition, l'*ensemble vide*, noté \emptyset , est l'ensemble qui ne contient aucun élément. Il est inclus dans tout ensemble.

L'*ensemble des parties* d'un ensemble \mathcal{E} est l'ensemble de tous les sous-ensembles de \mathcal{E} (y compris, donc, \emptyset et \mathcal{E} lui-même). On le note $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ ou $2^{\mathcal{E}}$.

Déf. 6 (Produit cartésien)

Étant donnés deux ensembles \mathcal{E} et \mathcal{F} , le *produit cartésien* de \mathcal{E} et \mathcal{F} , noté $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$, est un ensemble de couples : $\mathcal{E} \times \mathcal{F} = \{\langle x, y \rangle \text{ tels que } x \in \mathcal{E} \text{ et } y \in \mathcal{F}\}$
 $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ est aussi noté \mathcal{E}^2 .

Déf. 7 (Relation)

Une *relation* R sur un ensemble \mathcal{E} est un sous-ensemble de \mathcal{E}^2 .
 On écrit $\langle x, y \rangle \in R$ ou xRy .

Déf. 8 (Propriétés de relations)

Une relation R sur un ensemble \mathcal{E} peut avoir les propriétés suivantes :

réflexivité $\forall x \in \mathcal{E} \langle x, x \rangle \in R$

symétrie $\forall x, y \in \mathcal{E} \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R$

transitivité $\forall x, y, z \in \mathcal{E} (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R) \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R$

antisymétrie $\forall x, y \in \mathcal{E} (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R) \Rightarrow x = y$

Déf. 9 (Relation d'équivalence)

Une relation réflexive, symétrique et transitive est une *relation d'équivalence*.

Déf. 10 (Relation(s) d'ordre)

Une relation R réflexive, antisymétrique et transitive est une *relation d'ordre*.

– R est une relation *d'ordre strict* ssi elle vérifie la condition suivante :

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \notin R$$

– R est une relation *totale* ssi elle vérifie la condition suivante :

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \langle x, y \rangle \in R \text{ ou } \langle y, x \rangle \in R$$

(elle est *d'ordre partiel* sinon).

Déf. 11 (Application & fonction)

Une *application* f (ou *correspondance*, angl. *mapping*) entre deux ensembles \mathcal{E} et \mathcal{F} , notée $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, est un sous-ensemble de $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ tel que $\forall x \in \mathcal{E}$, il existe au moins un $y \in \mathcal{F}$ tel que $\langle x, y \rangle \in f$.

Pour $a \in \mathcal{E}$ et $b, c \in \mathcal{F}$, on note la correspondance sous la forme $f(a) = \{b, c, \dots\}$.
 b et c sont des *images* de a par f .

Si pour tout élément de \mathcal{E} , il y a une image unique par f , f est une *fonction*, et la notation est simplifiée : $f(a) = b$.

Une fonction est *bijjective* ssi chaque élément de \mathcal{F} est l'image par f d'exactly un élément de \mathcal{E} .

Déf. 12 (Opération)

On dira qu'un ensemble \mathcal{E} est muni d'une *opération* \circ s'il existe une fonction de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans un ensemble \mathcal{H} .

Pour $a, b \in \mathcal{E}$ et $c \in \mathcal{H}$, on note l'opération $a \circ b = c$.

Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$, l'opération est dite *interne* (on parle aussi de *loi de composition interne*).

Déf. 13 (Propriétés des opérations)

Une opération \circ sur un ensemble $\mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{H}$ peut avoir les propriétés suivantes :

$$(\forall a, b, c \in \mathcal{E})$$

Interne

$$a \circ b \in \mathcal{E}$$

Commutativité

$$a \circ b = b \circ a$$

Associativité

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

Admet un élément neutre ε

$$a \circ \varepsilon = a$$

Admet un élément absorbant 0

$$a \circ 0 = 0$$

Déf. 14 (Segment de type (m, n))

Un *segment de type (m, n)* (noté $[m, n]$) est le sous-ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à m et inférieurs ou égaux à n :

$$[m, n] = \{m, m + 1, m + 2, \dots, n - 1, n\}$$

Déf. 15 (Ensemble fini, cardinal)

Un ensemble \mathcal{E} est dit *fini* s'il existe une bijection de \mathcal{E} sur un segment de type $(1, n)$. n est appelé le *cardinal* de \mathcal{E} , noté $|\mathcal{E}|$ ou $\text{card}(\mathcal{E})$.

Déf. 16 (Ensemble infini)

Un ensemble \mathcal{E} est *infini dénombrable* ou *dénombrable* s'il existe une bijection de \mathcal{E} sur l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} .

Déf. 17 (Cardinal de $\mathcal{P}(\mathcal{E})$)

Si $|\mathcal{E}| = n$ on démontre que $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ a 2^n éléments.

Remarque : Si \mathcal{E} est infini dénombrable, $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ n'est pas dénombrable. Il a la puissance du continu.

Déf. 18 (Demi-groupe & monoïde)

Un *demi-groupe* est un couple ordonné (\mathcal{E}, \circ) où \mathcal{E} est un ensemble non vide, et \circ une opération binaire associative de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans \mathcal{E} .

Un demi-groupe qui possède un élément neutre est appelé un *monoïde*.

Le monoïde (X^*, \cdot) est de plus un ensemble infini (dénombrable) entièrement généré par une *base finie*, X . C'est la raison pour laquelle il est dit *libre*.