

A.1 Logique propositionnelle

1. Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules bien formées de L_p ?

- | | | |
|---|---|---------------------------------|
| (1) $\neg(\neg P \vee Q)$ | (5) $(P \rightarrow ((P \rightarrow Q)))$ | (9) $(P \vee (Q \vee R))$ |
| (2) $P \vee (Q)$ | (6) $((P \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow Q))$ | (10) $\neg P \vee Q \vee R$ |
| (3) $\neg(Q)$ | (7) $((P_{28} \rightarrow P_3) \rightarrow P_4)$ | (11) $(\neg P \vee \neg\neg P)$ |
| (4) $(P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)))$ | (8) $(P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$ | (12) $(P \vee P)$ |

2. Montrer que, quelles que soient φ , ψ et χ , les paires de formules suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

- | | | |
|--|--|----------------|
| (1) $\neg\neg\varphi$ | φ | |
| (2) $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg\varphi \vee \psi$ | |
| (2') $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ | |
| (3) $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ | contraposition |
| (4) $\varphi \leftrightarrow \psi$ | $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ | |
| (5) $\varphi \leftrightarrow \psi$ | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ | |
| (6) $\varphi \vee \varphi$ | φ | idempotence |
| (7) $\varphi \wedge \varphi$ | φ | " |
| (8) $\varphi \vee \psi$ | $\psi \vee \varphi$ | commutativité |
| (9) $\varphi \wedge \psi$ | $\psi \wedge \varphi$ | " |
| (10) $\varphi \vee (\psi \vee \chi)$ | $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$ | associativité |
| (11) $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ | $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ | " |
| (12) $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ | distributivité |
| (13) $\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ | $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ | " |
| (14) $\neg(\varphi \wedge \psi)$ | $\neg\varphi \vee \neg\psi$ | lois de Morgan |
| (15) $\neg(\varphi \vee \psi)$ | $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ | " |

3. Utilisez les résultats de l'exercice 2 pour (dé)montrer les équivalences suivantes (où \equiv note l'équivalence logique).

- | | | |
|--|----------|--|
| (1) $\varphi \leftrightarrow \psi$ | \equiv | $\psi \leftrightarrow \varphi$ |
| (2) $\varphi \rightarrow \neg\varphi$ | \equiv | $\neg\varphi$ |
| (3) $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ | \equiv | $\chi \wedge (\varphi \wedge \psi)$ |
| (4) $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ | \equiv | $\varphi \rightarrow \psi$ |
| (5) $(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$ | \equiv | $(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)$ |
| (6) $\varphi \rightarrow (\psi \wedge \chi)$ | \equiv | $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi)$ |
| (7) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ | \equiv | $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$ |

4. Montrez que (1) implique logiquement (2) et que (3) et (4) sont logiquement équivalentes.

- | |
|--|
| (1) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente |
| (2) Il n'est pas vrai que Marie est contente |
| (3) Marie est contente si Jean a réussi son examen |
| (4) Marie est contente ou il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen |

5. Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase correspond chaque variable propositionnelle.

- | |
|--|
| (1) Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup |
| (2) Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient |
| (3) Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant |
| (4) Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture |
| (5) Jean ne viendra que si Paul ne vient pas |
| (6) Si tu ne m'aides pas quand j'ai besoin de toi,
je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi |