

A.1 Propositions

1. Considérer la formule (2). Représenter son arbre de décomposition. Au vu de cet arbre, quels sont les différents ordres possibles de calcul des colonnes de la table composite ?

$$(2) \quad \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

2. Reprendre la formule (3), et calculer sa table de vérité composite en écrivant une colonne par sous-formule (1^{re} méthode).

$$(3) \quad \begin{array}{cccccccc} (& (& p & \wedge & (& q & \rightarrow & r &) &) & \vee & (& r & \rightarrow & p &) &) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

3. Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules bien formées de L_p ?

- | | | |
|---|---|----------------------------------|
| (1) $\neg(\neg P \vee Q)$ | (5) $(P \rightarrow ((P \rightarrow Q)))$ | (9) $(P \vee (Q \vee R))$ |
| (2) $P \vee (Q)$ | (6) $((P \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow Q))$ | (10) $\neg P \vee Q \vee R$ |
| (3) $\neg(Q)$ | (7) $((P_{28} \rightarrow P_3) \rightarrow P_4)$ | (11) $(\neg P \vee \neg \neg P)$ |
| (4) $(P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)))$ | (8) $(P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$ | (12) $(P \vee P)$ |

4. Montrer que, quelles que soient φ , ψ et χ , les paires de formules suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

- | | | |
|--|--|----------------|
| (1) $\neg\neg\varphi$ | φ | |
| (2) $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg\varphi \vee \psi$ | |
| (2') $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ | |
| (3) $\varphi \rightarrow \psi$ | $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ | contraposition |
| (4) $\varphi \leftrightarrow \psi$ | $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ | |
| (5) $\varphi \leftrightarrow \psi$ | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ | |
| (6) $\varphi \vee \varphi$ | φ | idempotence |
| (7) $\varphi \wedge \varphi$ | φ | " |
| (8) $\varphi \vee \psi$ | $\psi \vee \varphi$ | commutativité |
| (9) $\varphi \wedge \psi$ | $\psi \wedge \varphi$ | " |
| (10) $\varphi \vee (\psi \vee \chi)$ | $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$ | associativité |
| (11) $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ | $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ | " |
| (12) $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ | $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ | distributivité |
| (13) $\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ | $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ | " |
| (14) $\neg(\varphi \wedge \psi)$ | $\neg\varphi \vee \neg\psi$ | lois de Morgan |
| (15) $\neg(\varphi \vee \psi)$ | $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ | " |

5. Utilisez les résultats de l'exercice 4 pour (dé)montrer les équivalences suivantes (où \equiv note l'équivalence logique).

- | | | |
|--|----------|--|
| (1) $\varphi \leftrightarrow \psi$ | \equiv | $\psi \leftrightarrow \varphi$ |
| (2) $\varphi \rightarrow \neg\varphi$ | \equiv | $\neg\varphi$ |
| (3) $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ | \equiv | $\chi \wedge (\varphi \wedge \psi)$ |
| (4) $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ | \equiv | $\varphi \rightarrow \psi$ |
| (5) $(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$ | \equiv | $(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)$ |
| (6) $\varphi \rightarrow (\psi \wedge \chi)$ | \equiv | $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi)$ |
| (7) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ | \equiv | $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$ |

6. Soit le connecteur binaire '|', appelé *barre de sheffer*, ou *incompatibilité*, dont une définition est : $\llbracket \alpha | \beta \rrbracket = 0$ ssi $\llbracket \alpha \rrbracket = 1$ et $\llbracket \beta \rrbracket = 1$. Montrer, en utilisant des tables de vérité composites, que toute formule comportant les connecteurs ' \rightarrow ' ou ' \neg ' est équivalente à une formule n'utilisant que le connecteur '|'.

7. Calculez la valeur de vérité des phrases suivantes dans chacune des situations proposées (attention, certaines phrases sont ambiguës; vous proposerez plusieurs analyses quand c'est nécessaire).

- (4) a. Jean a réussi son examen ou Marie est contente
 b. Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
 c. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen et Marie est contente
 d. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen ou il n'est pas vrai que Marie est contente
 e. Si Jean a réussi son examen, il n'est pas vrai que Marie est contente
 f. Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen si Marie est contente

- Situations : (5) a. Jean a réussi son examen, Marie est contente
 b. Jean a réussi son examen, Marie n'est pas contente
 c. Jean n'a pas réussi son examen, Marie est contente

8. Montrez que (1) implique logiquement (2) et que (3) et (4) sont logiquement équivalentes.

- (1) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
 (2) Il n'est pas vrai que Marie est contente
 (3) Marie est contente si Jean a réussi son examen
 (4) Marie est contente ou il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen

9. Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase correspond chaque variable propositionnelle.

- (1) Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup
 (2) Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient
 (3) Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant
 (4) Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture
 (5) Jean ne viendra que si Paul ne vient pas
 (6) Si tu ne m'aides pas quand j'ai besoin de toi, je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi

10. Montrer que les connecteurs \wedge et \neg sont suffisants, c'est-à-dire que toute formule comprenant d'autres connecteurs (\vee , \rightarrow , \leftrightarrow) est équivalente à une formule ne comprenant que \wedge et \neg .

11. *Le prince Beaudiscours est dans un cruel embarras. Le voici au pied du manoir où la fée Antinomie retient prisonnière la douce princesse Vérité.*

Deux portes donnent accès au château. L'une conduit aux appartements de la princesse, l'autre s'ouvre sur l'antre d'un dragon.

Le prince sait seulement que l'un de ces portes s'ouvre si on énonce une proposition vraie, et l'autre si on énonce une proposition fausse.

Comment le prince peut-il délivrer la princesse ?

Indice : la logique propositionnelle peut nous aider à résoudre cette énigme, à condition de considérer les deux propositions suivantes.

P = la porte de droite mène aux appartements de la princesse ;

Q = la porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie.

Chacune de ces propositions peut être vraie ou fausse. En considérant tous les cas possibles, on peut trouver la proposition que notre prince doit énoncer.

12. On vous donne l'ordre suivant. Comment respecter cet ordre ?

- (6) Si vous ne marchez pas en silence n'avez pas de revolver chargé, ou portez des lunettes noires, mais si vous avez un revolver chargé marchez en silence ou ne portez pas de lunettes noires

13. Traduire aussi précisément que possible les phrases suivantes en logique des propositions. Indiquez à quelle phrase correspond chaque variable propositionnelle.

- (7) a. On ira au cinéma ce soir à condition que la vaisselle soit finie.
 b. Quand Jean est en avance et Marie en retard, il n'ouvre la porte que si Anne et Bruno sont là.