A.2 Exercices de révision

1. Traduisez les énoncés suivants en formules de la logique des prédicats (on donnera à chaque fois l'interprétation des prédicats utilisés — par exemple A(x,y) = x aime y). En cas d'énoncé ambigu, on proposera deux formules.

(11) a. Jean est plus grand que Marie
b. Paul a vu Léa et elle ne l'a pas vu
c. Si Jean est un homme, alors il est mortel
d. Un chat est entré
e. Certains enfants ne sont pas malades
f. Tous les éléphants ont une trompe
g. Tous les hommes n'aiment pas Marie
h. Il y a une chanson qu'aucun enfant ne chante
i. Si tous les hommes aiment Marie, alors elle est contente
j. Tous les fermiers apprécient un ministre

2. Traduisez les quatre propositions du carré d'opposition en logique des prédicats. Dans chaque cas, il y a deux possibilités de traduction, avec les deux quantificateurs.
3. Traduisez en logique des prédicats les propositions suivantes, et, en cas d'ambiguïté, donnez toutes les traductions correspondantes.

(12) a. Bien que personne ne fasse de bruit, Jean n'arrive pas à se concentrer
b. Si personne ne fait de bruit, Jean répondra au moins à une question
c. Tout le monde a menti à quelqu'un dans sa vie
d. Tous les étudiants, sauf Jean, sont présents
e. Aucun enfant ne fait jamais aucune bêtise
f. Tout le monde a lu un livre de logique

4. Traduire les phrases suivantes en logique des *prédicats*

(13) a. Quand quelqu'un fait confiance à quelqu'un qui a trompé tout le monde, il a tort
b. Il n'y a pas de grand champion qui n'ait causé de tort à personne
c. Il faut qu'une porte soit ouverte ou fermée

A.3 Corrigés

1. $\boxed{\text{n}^o\ 1,\ \text{p } 15}$

(14) a. Jean est plus grand que Marie $G(j,m)$
b. Paul a vu Léa et elle ne l'a pas vu $V(p,l) \wedge \neg V(l,p)$
c. Si Jean est un homme, alors il est mortel $H(j) \rightarrow M(j)$
d. Un chat est entré $\exists x(C(x) \wedge E(x))$
e. Certains enfants ne sont pas malades $\exists x(E(x) \wedge \neg M(x))$
f. Tous les éléphants ont une trompe $\forall x(E(x) \rightarrow T(x))$
g. Tous les hommes n'aiment pas Marie $\forall x(H(x) \rightarrow \neg A(x,m))$
$\neq \neg\forall x(H(x) \rightarrow A(x,m))$
h. Il y a une chanson qu'aucun enfant ne chante $\exists x \forall y((C(x) \wedge E(y)) \rightarrow \neg C(y,x))$
$= \exists x \neg\exists y(C(x) \wedge E(y) \wedge C(y,x))$
i. Si tous les hommes aiment Marie, alors elle est contente
$(\forall x(H(x) \rightarrow A(x,m)) \rightarrow C(m))$
j. Tous les fermiers apprécient un ministre $\forall x \exists y((F(x) \wedge M(y)) \rightarrow A(x,y))$
$\neq \exists y \forall x((F(x) \wedge M(y)) \rightarrow A(x,y))$

2. $\boxed{\text{n}^o\ 2,\ \text{p } 15}$

Tout H est M	Un H est M	Un H n'est pas M	Aucun H n'est M
$\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$	$\exists x(H(x) \wedge M(x))$	$\exists x(H(x) \wedge \neg M(x))$	$\forall x(H(x) \rightarrow \neg M(x))$
$\neg\exists x(H(x) \wedge \neg M(x))$	$\neg\forall x(H(x) \rightarrow \neg M(x))$	$\neg\forall x(H(x) \rightarrow M(x))$	$\neg\exists x(H(x) \wedge M(x))$

3. $\boxed{\text{n}^o\ 3,\ \text{p } 15}$

(15) a. Bien que personne ne fasse de bruit, Jean n'arrive pas à se concentrer
$(\forall x(P(x) \to \neg B(x)) \land \neg C(j))$

b. Si personne ne fait de bruit, Jean répondra au moins à une question
$(\forall x(P(x) \to \neg B(x)) \to \exists y(Q(y) \land R(j, y)))$

c. Tout le monde a menti à quelqu'un dans sa vie
- à la même personne $\exists y \forall x((P(x) \land P(y)) \to M(x, y))$
- pour chaque personne, il y a quelqu'un a qui... $\forall x \exists y((P(x) \land P(y)) \to M(x, y))$

d. Tous les étudiants, sauf Jean, sont présents $\forall x((E(x) \land x \neq j) \to P(x))$
- Autre possibilité, toujours fausse[2] $(\forall x(E(x) \to P(x)) \land \neg P(j))$

e. Aucun enfant ne fait jamais aucune bêtise
- Tout enfant fait des bêtises[3] $\forall x(E(x) \to B(x))$ $\forall x(E(x) \to \exists y(B(y) \land F(x, y)))$
- Aucun enfant ne fait de bêtise $\forall x(E(x) \to \neg B(x))$ $\forall x(E(x) \to \neg \exists y(B(y) \land F(x, y)))$

f. Tout le monde a lu un livre de logique
- Un livre a été lu par tout le monde $\exists x \forall y((LdL(x) \land P(y)) \to L(y, x))$
- Tout le monde a lu un livre différent $\forall y \exists x((LdL(x) \land P(y)) \to L(y, x))$

4. $\boxed{\text{n}^o\ 4,\ \text{p } 15}$

- Phrase (1a) :

Procédons en essayant de faire apparaître des propriétés indépendantes :

$$\text{Quand quelqu'un } \overbrace{\text{fait confiance à quelqu'un qui } \underbrace{\text{a trompé tout le monde}}_{\Psi}}^{\Phi}\text{, il a tort}$$

– Premier niveau : *Quand quelqu'un* Φ*, il a tort*

– l'indéfini *quelqu'un* combiné avec la conditionnelle a une valeur universelle

$$\forall x\ ((Px \land \Phi x) \to Tx)$$

– Deuxième niveau : $\Phi x = x$ *fait confiance à quelqu'un qui* Ψ

– ambiguïté : *quelqu'un* peut être lu existentiellement ou universellement.

$$\exists y\ ((Py \land \Psi y) \land C(x, y))$$
$$\forall y\ ((Py \land \Psi y) \to C(x, y))$$

– Troisième niveau : $\Psi y = y$ a trompé tout le monde

$$\forall z\ (Pz \to Tr(y, z))$$

Si on met tout ensemble, cela donne :

$$\forall x\ \Big(\Big(Px \land \exists y\ \Big(\Big(Py \land \forall z\ (Pz \to Tr\,(y, z))\Big) \land C(x, y)\Big)\Big) \to Tx\Big)$$

- Phrase (1b) : deux formules équivalentes (il y en a d'autres)

$$\neg \exists x\ (GCx \land \neg \exists y\ (Py \land CT(x, y)))$$
$$\neg \exists x\ (GCx \land \forall y\ (Py \to \neg CT(x, y)))$$

- Phrase (1c) : on peut discuter sur le *ou* (inclusif ou exclusif)

$$\forall x\ (Px \to (Ox \lor Fx))$$

[2] à moins de violer la présupposition que Jean est étudiant.

[3] Première formule : on pose pour simplifier que $B(x) = x$ fait des bêtises. Pour être rigoureux, il faut bien sûr décomposer aussi ce prédicat, c'est fait dans la seconde formule.