Université Paris Diderot - Master 1 Linguistique Informatique - Sémantique computationnelle - 2013/2014

TD 3 - Logique des propositions

A - La tâche de Sélection de Wason

1. On cherche à tester des hypothèses faites sur les cartes d'un paquet. Il y a ci-dessous un ensemble de 4 cartes tirées de ce paquet. Sur chaque carte figure une lettre d'un côté et un chiffre de l'autre côté :

   Règle : S'il y a un A sur une face alors il y a un 4 sur l'autre face

   Laquelle ou lesquelles de ces cartes est-il nécessaire de retourner pour décider si la règle est vraie ou fausse ?

A	7	C	4

2. Imaginez que vous êtes un policier. Votre mission consiste à vous assurer que vos concitoyens respectent la loi. Les quatre cartes ci-dessous vous donnent des informations sur des personnes consommant une boisson dans un bar. Sur une des deux faces figure l'âge de la personne et sur l'autre la boisson qu'elle consomme.

   Règle : Si une personne boit de l'alcool alors elle doit avoir plus de 18 ans

   Laquelle ou lesquelles de ces cartes est-il nécessaire de retourner pour vérifier que tout le monde respecte la loi ?

Grenadine	33 ans	Whisky	14 ans

B - Traductions en Logique Propositionnelle

1. Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase correspond chaque variable propositionnelle.
   (a) Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup
   (b) Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient
   (c) Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant
   (d) Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture
   (e) Jean ne viendra que si Paul ne vient pas
   (f) Pierre n'a ni frère ni soeur.
   (g) Jean n'ira au cinéma que s'il a terminé ses devoirs.
   (h) S'il pleut et qu'il y a du soleil, alors il y a un arc-en-ciel.
   (i) Il pleut ou il ne pleut pas.

(j) Il pris peur et tua l'intrus.

(k) Le voleur n'avait ni complice ni voiture, sauf si les témoins ont menti.

(l) McX a été élu, ou Wyman a été élu et une nouvelle ère a commencé.
McX a été élu ou Wyman a été élu, et une nouvelle ère a commencé.

(m) Jean et Pierre sont amis.
Jean et Pierre sont amusants ?pendant les fêtes. (are fun at parties)

(n) Jean veut un train et un vélo à Noël mais il n'aura ni l'un ni l'autre.

(o) Personne ne rit ni n'applaudit.

2. Le prince Beaudiscours

Le prince Beaudiscours est dans un cruel embarras. Le voici au pied du manoir où la fée Antinomie retient prisonnière la douce princesse Vérité.

Deux portes donnent accès au château. L'une conduit aux appartements de la princesse, l'autre s'ouvre sur l'antre d'un dragon.

Le prince sait seulement que l'un de ces portes s'ouvre si on énonce une proposition vraie, et l'autre si on énonce une proposition fausse.

Comment le prince peut-il délivrer la princesse ?

Indice : la logique propositionnelle peut nous aider à résoudre cette énigme, à condition de considérer les deux propositions suivantes :
P = la porte de droite mène aux appartements de la princesse ;
Q = la porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie.
Chacune de ces propositions peut être vraie ou fausse. En considérant tous les cas possibles, on peut trouver la proposition que notre prince doit énoncer.

3. Parmi les discours suivants, lesquels sont des raisonnement corrects ?

(a) Si Lucette a menti, alors Hugo est coupable. Or Hugo n'est pas coupable. Donc Lucette n'a pas menti.

(b) Si Lucette a menti, alors Hugo est coupable. or Lucette n'a pas menti. Donc Hugo n'est pas coupable.

C - Formules et équivalences

1. Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules bien formées de L_p ?

(a) $\neg(\neg P \vee Q)$

(b) $P \vee (Q)$

(c) $\neg(Q)$

(d) $(P \to ((P \to Q)))$

(e) $(P \vee (Q \vee R))$

(f) $((P \to P) \to (Q \to Q))$

(g) $\neg P \vee Q \vee R$

(h) $((P_{28} \to P_3) \to P_4)$

(i) $(\neg P \vee \neg\neg P)$

(j) $(P_2 \to (P_2 \to (P_2 \to P_2)))$

(k) $(P \to (P \to Q) \to Q)$

(l) $(P \vee P)$

2. Montrer que, quelles que soient φ, ψ et χ, les formules de chacune des paires suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

(a) $\neg\neg\varphi$ et φ

(b) $\varphi \to \psi$ et $\neg\varphi \vee \psi$

(c) $\varphi \to \psi$ et $\neg\psi \to \neg\varphi$ (contraposition)

(d) $\varphi \leftrightarrow \psi$ et $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

(e) $\varphi \vee \psi$ et$\psi \vee \varphi$ (commutativité)

(f) $\varphi \vee (\psi \vee \chi)$ et $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$ (associativité)

(g) $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ et $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ (distributivité)

(h) $\neg(\varphi \wedge \psi)$ et $\neg\varphi \vee \neg\psi$ (lois de Morgan)

(i) $\neg(\varphi \vee \psi)$ et $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ ("")

(j) $\varphi \to \psi$ et $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$

(k) $\varphi \to \neg\psi$ et $\psi \to \neg\varphi$

(l) $\varphi \leftrightarrow \psi$ et $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

(m) $\varphi \vee \varphi$ et φ (idempotence)

(n) $\varphi \wedge \varphi$ et φ (idempotence)

(o) $\varphi \wedge \psi$ et $\psi \wedge \varphi$ (commutativité)

3. Utilisez les résultats de l'exercice précédent pour (dé)montrer les équivalences suivantes (où $\equiv$ note l'équivalence logique).

(a) $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv \psi \leftrightarrow \varphi$

(b) $\varphi \to \neg\varphi \equiv \neg\varphi$

(c) $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv \chi \wedge (\varphi \wedge \psi)$

(d) $\varphi \to (\varphi \to \psi) \equiv \varphi \to \psi$

(e) $(\varphi \vee \psi) \to \chi \equiv (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)$

(f) $\varphi \to (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)$

(g) $\varphi \to (\psi \to \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \to \chi$

D - Connecteurs suffisants

1. Montrer que les connecteurs $\wedge$ et $\neg$ sont suffisants, c'est-à-dire que toute formule comprenant d'autres connecteurs ($\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$) est équivalente à une formule ne comprenant que $\wedge$ et $\neg$.

E - Tautologies

1. Montrer que les formules suivantes sont des tautologies.

(a) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$

(b) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$

(c) $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

(d) $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

F- Table de vérité composite

1. Calculer la table de vérité composite de la formule suivante en écrivant une colonne par sous-formule.

$$((p \wedge (q \to r)) \vee (r \to p)) \tag{1}$$