

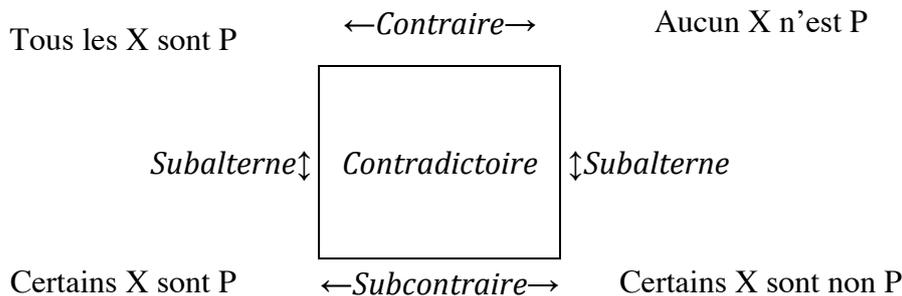
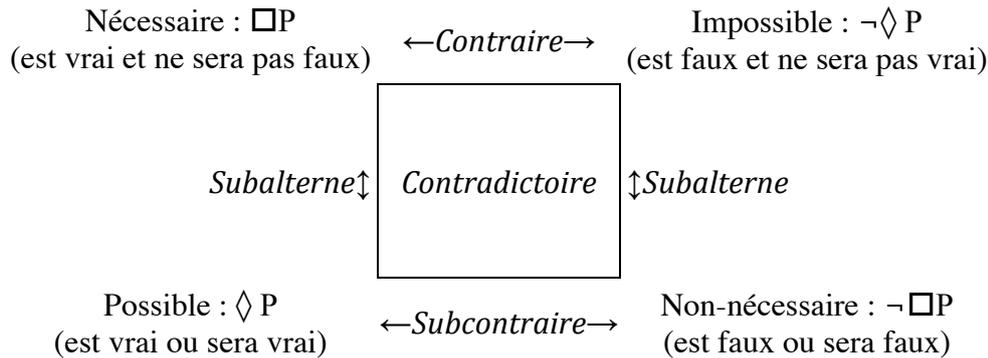
Sémantique Avancée
Modalités et sémantique des mondes possibles

1) LA MODALITE DANS LA LANGUE

A) Aristote : le possible et le nécessaire

- (1) a. *Paul vient.*
 b. *Il est nécessaire que Paul vienne.*
 c. *Il est possible que Paul vienne.*

Carré logique et carré des modalités



Parallèle entre modalités et quantification

Opérateurs duaux : $\Diamond P \Leftrightarrow \neg \Box \neg P$

B) Autres modalités

Choix de la base modale : « The following categories, however, are of primary importance in the study of natural language. Epistemic modality (Greek episteme, meaning 'knowledge') concerns what is possible or necessary given what is known and what the available evidence is. Deontic modality (Greek: deon, meaning 'duty') concerns what is possible, necessary, permissible, or obligatory, given a body of law or a set of moral principles or the like. Bouletic modality, sometimes boulomaic modality, concerns what is possible or necessary, given a person's desires. Circumstantial modality, sometimes dynamic modality, concerns what is possible or necessary, given a particular set of circumstances. Teleological modality (Greek telos, meaning 'goal') concerns what means are possible or necessary for achieving a particular goal. In the descriptive literature on modality, there is taxonomic exuberance far beyond these basic distinctions. » (von Stechow, 2006)

Modalités aléthiques et ontiques

- (2) *Si l'assassin est sur le lieu du crime et s'il n'y a que quatre personnes sur le lieu du crime, alors l'assassin est nécessairement une de ces quatre personnes. (aléthique)*
- (3) *Un chameau a nécessairement deux bosses. (ontique)*

Modalités métaphysiques/historiques

- (4) *À 5 km de l'arrivée, Jean pouvait encore gagner la course.*
- (5) *L'humanité finira par détruire la planète.*

Modalités épistémiques

- (6) a. *Les clés peuvent être dans la boîte à gants.*
b. *Marie doit être arrivée à Marseille à l'heure qu'il est.*

a. possibilités épistémiques :

il se peut que, il se pourrait que, peut-être, éventuellement...

b. nécessités épistémiques :

certain, sûr, certainement, sûrement, probable, probablement...

Attitudes propositionnelles

savoir, croire, vouloir, souhaiter, espérer, regretter, exiger, affirmer, refuser, etc.

Donc

- une liste très large de modalités : aléthique, ontique, épistémique, doxastique, déontique, boulique, téléologique (circonstancielle), habilitative, dispositionnelle, quantificationnelle, mais aussi temporelle et illocutoire.
- Point commun : modes non-factuels d'énoncés

C) Ambiguïté et sous détermination : des parfums de modalité

- une même forme peut exprimer différentes valeurs (*devoir / have to ; pouvoir*)

- (7) a. *Jean doit être malade.*
b. *Jean doit s'excuser.*
c. *Si tu aimes le chocolat, tu dois absolument goûter la nouvelle glace de chez Picard.*
d. *Les domestiques doivent parler anglais à la maîtresse de maison.*
- (8) *Bridget peut jouer de la clarinette, à l'heure qu'il est.*

Test : compléter ces phrases avec une subordonnée en *parce que*.

D) Classification plus linguistique (Portner, 2009)

1. Modalité phrastique (au dessus du VP)

- (a) Les verbes modaux : *pouvoir, devoir* qui ont portée sur un autre verbe.
- (b) Les adverbes modaux : *peut-être, sûrement, probablement...*
- (c) Génériques, habituels
- (d) Le temps et l'aspect
- i. Passé, présent, futur
 - ii. Passé associé au non réel
- (9) *Même si Marie restait jusqu'à demain, je serai triste.*
- (e) Conditionnels : *si... alors / quand*
- (f) La modalité cachée ou invisible :
- (10) a. *Tim sait comment résoudre ce problème.*
b. *Tim sait comment il peut résoudre ce problème.*

2. La modalité subphrastique (dans le VP)

- (a) Les adjectifs et les noms modaux: *possible, nécessaire, certain, la possibilité...*
 (b) Les verbes ou les locutions verbales d'attitude propositionnelle : *croire, vouloir, savoir, se souvenir, (être) certain que, (être) heureux que...*
 (c) Le mode verbal, et notamment le contraste entre indicatif et subjonctif.
 (11) *Ils cherchent une secrétaire qui (connaît / connaisse) 5 langues.*
 (d) L'infinifit (comme modalité invisible)

3. La modalité discursive

- (a) Evidentialité
 (12) a. *D'après la police, il s'agit d'un suicide.*
 b. *Il s'agirait d'un suicide.*
 c. *J'ai entendu dire qu'il devrait pleuvoir.*
 (b) Types de phrase et modalité illocutoire
 (13) a. *Est-ce que Jean sort.*
 b. *Que Jean sorte !*

Conclusion :

- Modalité et non factualité
 - Modality is a fundamental topic in the study of meaning, as it underlies one of the most significant features of human language: the capacity to convey information about objects and events that are displaced not only in time and space but also in actuality or potentiality. » (Portner, 2009 : préface))
 - « Modality is the linguistic phenomenon whereby grammar allows one to say things about, or on the basis of, situations which need not be real. » Portner (2009 : 1)
- Une logique des modalités : un cadre unifié pour étudier des raisonnements qui contiennent des opérateurs modaux.

Schémas de raisonnement modal

- (14) *Tous les hommes sont mortels*
Il est possible que Héraclès soit un homme
 ?
 (15) *Je sais que s'il pleut alors la rue est humide.*
Je tiens pour concevable qu'il pleuve.
Donc je tiens pour concevable que la rue soit humide.

- Différents schémas de raisonnement en fonction des modalités étudiées
 (16) a. *Il pleut peut-être mais peut-être qu'il ne pleut pas.*
 $\Diamond A \wedge \Diamond \neg A$ sont compatibles
 b. *Je sais qu'il pleut et je sais qu'il ne pleut pas.*
 $KA \wedge K\neg A$ sont incompatibles

Table 1 – Catégories de modalité.

aléthique	principes de logique	nécessaire, valide, possible, contingent
ontique	nature des choses	par définition
métaphysique ou historique	cours des événements	prédit, prévisible
épistémique	connaissances	su, certain, ignoré, incertain
doxastique	croyances	cru, « crédible »
déontique	devoirs, lois	obligatoire, permis

éthique	morale	obligatoire, bon, permis
boulétique ou boulique	désirs	désiré, voulu, indifférent ou envisagé
téléologique	buts	visé, conseillé, suggéré
habilitative	capacités	(« inévitable »), faisable
dispositionnelle	circonstances	(« inévitable »), accessible
quantificationnelle	généralités	générique, occasionnel
temporelle	temporalité	chronologie passé/futur

2) LA LOGIQUE MODALE PROPOSITIONNELLE LM_0 : SYNTAXE DE LM_0

Les opérateurs modaux : des connecteurs unaires.

Définition 1 (Vocabulaire)

1. un ensemble (possiblement infini) de lettres propositionnelles $\{p, q, r, \dots, p^1, p^2, \dots\}$
2. un jeu de connecteurs $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
3. les parenthèses ()
4. les symboles \diamond et \square .

Définition 2 (Syntaxe)

1. les lettres de proposition sont des formules bien formées
 2. si φ et ψ sont des formules bien formées, alors $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ le sont aussi
 3. si φ est une formule bien formée, $\diamond\varphi$ et $\square\varphi$ sont des formules bien formées.
- On s'autorise, quand cela ne génère pas d'ambiguïté, à effacer les parenthèses.

Exercice 1

Traduisez les phrases suivantes dans LM_0 :

1. Il est possible que tu ne me comprennes pas, mais ce n'est pas nécessaire.
2. S'il peut neiger ici, il doit être possible qu'il neige.
3. Il est possible que s'il peut neiger, il neige.
4. S'il peut être nécessaire qu'il neige, alors il doit neiger.
5. Peut-être qu'il neige et peut-être que c'est nécessaire.

Exercice 2

Les formules suivantes sont-elles des formules de LM_0 ?

$p \rightarrow \diamond q$, $\square p \rightarrow \diamond q$, $\square \square p \vee q$, $p \square \rightarrow q$, $(p \rightarrow q) \square$, $\square(p \rightarrow q)$, $\square(\diamond p \rightarrow q)$, $\square(\diamond p)$

Remarques

• Pourquoi deux modalités et pas une seule, si l'une est duale de l'autre ?

- (17) a. $\diamond P \Leftrightarrow \neg \square \neg P$ b. $\neg \diamond P \Leftrightarrow \square \neg P$
c. $\diamond \neg P \Leftrightarrow \neg \square P$ d. $\neg \diamond \neg P \Leftrightarrow \square P$

• Pourquoi pas plus de deux modalités ? Il existe des logiques **multi-modales**.

(18) *Il y a 30% de chances que, si Jean est élu, Marie devienne Présidente adjointe.*

(19) *Il est nécessaire que tout le monde sache que Jean doit rembourser sa dette.*

3) SEMANTIQUE DE LA LOGIQUE MODALE : APPROCHES AXIOMATIQUES

Quelle axiomatique pour LM_0 ? Une logique modale, ou des logiques modales ?

a) Cadre général

Une logique modale est dite **normale** ou de Kripke si et seulement si elle admet

1) La règle d'inférence de nécessité :

(N) Si T est un théorème, alors $\Box T$ aussi.

$$\frac{T}{\Box T}$$

2) L'axiome de distribution de Kripke :

(K) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

Rq :

(20) $\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$ et vice versa

(21) $(\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box(A \vee B)$ mais pas vice versa.

b) Applications

- aux modalités aléthiques : logique normale, modalités duales

- aux autres modalités

Logique	Symboles	Signification
aléthique	\Box	il est nécessaire
	\Diamond	il est possible
déontique	O	il est obligatoire
	P	il est permis
	F	Il est interdit (forbidden)
temporelle	G	Désormais / It will always be the case that
	F	Un jour futur / It will be the case that
	H	Toujours dans le passé / It has always been the case that
	P	Un jour passé / It was the case that
doxastique	Bx	x croit
épistémique	Kx	x sait

c) Quels axiomes pour quelle logique ?

Logique épistémique

La règle de nécessité : si $\models A$ alors $\models \Box A$

L'axiome de distributivité : $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

K : $A \rightarrow \Box A$ (M) $\Box A \rightarrow A$ (4) $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ (5) $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$

Logique déontique

(M) $OA \rightarrow A$ (D) $OA \rightarrow PA$?? $O(OA \rightarrow A)$

Logique temporelle

$PA = \sim H \sim A$ $H =$ it always Has been the case
 $FA = \sim G \sim A$ $G =$ it is always GOING to be the case

“Necessitation” : If A is a theorem then so are GA and HA .
 Distribution : $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$ et $H(A \rightarrow B) \rightarrow (HA \rightarrow HB)$
 Axiomes d’interaction : $A \rightarrow GPA$ et $A \rightarrow HFA$

Exercice 3 : Que pensez de :

$GA \rightarrow GGA$; $HA \rightarrow HHA$

$GGA \rightarrow GA$; $HHA \rightarrow HA$

$GA \rightarrow FA$; $HA \rightarrow PA$

- (22) a. D’ici une heure, la lumière aura été éteinte.
 b. Jean avait déjà mangé quand je suis arrivé.

Exercice 4 : quelles relations existent-ils entre les différents opérateurs de chaque logique ?

$\Diamond \Phi \Leftrightarrow \neg \Box \neg \Phi$ mais est-ce que $\Box \Phi \Leftrightarrow \neg P \neg \Phi$, $\Box \Phi \Leftrightarrow \neg F \neg \Phi \dots ?$

d) Différentes modalités → différents schémas de raisonnement

- (23) a. Il pleut et il ne pleut pas.
 b. Il pleut peut-être et peut-être il ne pleut pas. (Compatible)
 c. Je crois qu’il pleut et je crois qu’il ne pleut pas. (Incompatible)

e) Les axiomes remarquables

Nom	Contenu
K	$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
D	$\Box A \rightarrow \Diamond A$
M	$\Box A \rightarrow A$
B	$A \rightarrow \Box \Diamond A$
4	$\Box A \rightarrow \Box \Box A$
5	$\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$

Les logiques/ systèmes remarquables

Nom	Contenu	
T	K+M	$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ $\Box A \rightarrow A$
B	K+B	$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ $A \rightarrow \Box \Diamond A$
S4	K+M+4	$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ $\Box A \rightarrow A$ $\Box A \rightarrow \Box \Box A$
S5	K+M+5 ou (K+M+4)+B	$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$ $\Box A \rightarrow A$ $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$ $A \rightarrow \Box \Diamond A$

Exercice 5 : montrer que

- dans S4, $\Box\Box A$ est équivalent à $\Box A$,
- dans S5, toute suite composée de \Box et de \Diamond quel que soit leur ordre d'apparition peut se réduire au dernier de ces symboles.
- $S5 = S4 + (B)$.

Exercice 6 :

Selon vous, les formules suivantes doivent-elles être vues comme des axiomes de LM

$$\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$$

$$\Box(A \vee B) \rightarrow (\Box A \vee \Box B)$$

$$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \Box B)$$

$$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$$

Le système T

K est trop faible pour bien rendre compte de la nécessité. En particulier, on souhaite que :

$$(M) \Box A \rightarrow A$$

K + (M) correspond au système T.

Les systèmes S4 et S5

T est encore trop faible pour représenter la nécessité et la possibilité, on ajoute :

$$(4) \Box A \rightarrow \Box\Box A$$

$$(5) \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$$

On note S4 le système K+M+(4) et S5 le système K+M+(5).

Dans S4, $\Box\Box A$ est équivalent à $\Box A$, donc on peut remplacer toute suite de n \Box par un seul \Box

Dans S5, toute suite composée de \Box et de \Diamond quel que soit leur ordre d'apparition peut se réduire au dernier de ces symboles.

$$\mathbf{S4:} \Box\Box\dots\Box = \Box \text{ and } \Diamond\Diamond\dots\Diamond = \Diamond$$

$$\mathbf{S5:} 00\dots\Box = \Box \text{ and } 00\dots\Diamond = \Diamond, \text{ where each } 0 \text{ is either } \Box \text{ or } \Diamond$$

Le système B (du nom du logicien Brouwer)

$$(B) A \rightarrow \Box\Diamond A$$

On remarque que $S5 = S4 + (B)$.

Cet axiome pose problème, car s'il paraît intuitivement acceptable il a pour conséquence que $\Diamond\Box A \rightarrow A$. Si A est possiblement nécessaire, alors c'est le cas. C'est un axiome pas évident.

4) SEMANTIQUE DE LA LOGIQUE MODALE : LES MONDES POSSIBLES**Sémantique**

Modèles dominants : les mondes possibles, avec relation d'accessibilité (par exemple, la succession temporelle).

Accessibilité entre mondes et enchâssement des modalités : $\Box\Diamond p$ ou $\Diamond\Box p$

Définitions :

- On appelle **frame**, une paire $\langle G, R \rangle$ où G est un ensemble non vide de mondes possibles et R une relation d'accessibilité définie sur cet ensemble.
- Un **modèle**, c'est un triplet $\langle G, R, \models \rangle$ dans lequel $\langle G, R \rangle$ est un cadre et \models est une relation entre les mondes possibles et les lettres de proposition. $\Gamma \models P$ est vérifié si P est vrai dans le monde Γ .
- Soit un modèle $\langle G, R, \models \rangle$ Pour tout $\Gamma \in G$, on dit que

1. $\Gamma \models \neg X$ ssi $\Gamma \not\models X$
2. $\Gamma \models (X \wedge Y)$ ssi $\Gamma \models X$ et $\Gamma \models Y$
3. $\Gamma \models \Box X$ ssi pour tout $\Delta \in G$, si $\Gamma R \Delta$ alors $\Delta \models X$.
4. $\Gamma \models \Diamond X$ ssi il y a un $\Delta \in G$ tel que $\Gamma R \Delta$ et $\Delta \models X$.

Exercice 7 : Soit le modèle M suivant :

$W = \{w_0, w_1, w_2, w_3\}$

$w_0 \models p, q$; $w_1 \models p, \neg q$; $w_2 \models p, \neg q$, $w_3 \models \neg p, \neg q$

$R = \{(w_0, w_0), (w_0, w_1), (w_0, w_2), (w_2, w_2), (w_2, w_0), (w_3, w_1), (w_3, w_2)\}$

Vérifier si on a :

$M, w_0 \models \Box p$ $M, w_0 \models \Box \neg q$ $M, w_0 \models \Diamond \neg q$
 $M, w_3 \models \Box p$ $M, w_3 \models \Box p \rightarrow p$ $M, w_1 \models \Box (p \vee q)$
 $M, w_3 \models \Box \Box p$ $M, w_0 \models \Box \Diamond p$ $M, w_2 \models \Box \Diamond \neg q$

Construire un contre exemple à chacune des formules suivantes :

- $\Box A \rightarrow A$
- $\Box A \rightarrow \Diamond A$
- $A \rightarrow \Box \Diamond A$
- $\Box A \rightarrow \Box \Box A$
- $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$
- $\Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond A$

5) CORRESPONDANCES

Logique	Condition sur les cadres
K	Aucune condition
D	Serial
T	Réflexive
B	Réflexive, symétrique
K4	Transitive
S4	Réflexive, transitive
S5	Réflexive, symétrique, transitive

Conclusions

Deux points de vue différents :

- a) relation entre logique modale et structure relationnelle
- b) axiomatique sur les opérateurs modaux.

- Des systèmes axiomatiques \rightarrow difficile de les comparer.
- Absence de sémantique associée à ces approches syntaxiques.
 Essai de Carnap et Prior (logiques temporelles)
 Hintikka, Kripke : mondes possibles et relation d'accessibilité

Bibliographie

- M. Fitting, R. Mendelsohn, *First Order Modal Logic*, Springer, 1998.
- J.W. Garson, *Modal Logic for Philosophers*. Cambridge U.P., 2006.
- P. Portner, *Modality*, Oxford University Press (Studies in Semantics and Pragmatics), 2009.