

## TD 3 - Logique des propositions

### A - Traductions en Logique Propositionnelle

1. Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase correspond chaque variable propositionnelle.
  - (a) Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup
  - (b) Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient
  - (c) Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant
  - (d) Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture
  - (e) Jean ne viendra que si Paul ne vient pas
  - (f) Pierre n'a ni frère ni soeur.
  - (g) Jean n'ira au cinéma que s'il a terminé ses devoirs.
  - (h) S'il pleut et qu'il y a du soleil, alors il y a un arc-en-ciel.
  - (i) Il pleut ou il ne pleut pas.
  - (j) McX a été élu, ou Wyman a été élu et une nouvelle ère a commencé.  
McX a été élu ou Wyman a été élu, et une nouvelle ère a commencé.
  - (k) Personne ne rit ni n'applaudit.

#### 2. Le prince Beaudiscours

*Le prince Beaudiscours est dans un cruel embarras. Le voici au pied du manoir où la fée Antinomie retient prisonnière la douce princesse Vérité.*

*Deux portes donnent accès au château. L'une conduit aux appartements de la princesse, l'autre s'ouvre sur l'ancre d'un dragon.*

*Le prince sait seulement que l'un de ces portes s'ouvre si on énonce une proposition vraie, et l'autre si on énonce une proposition fausse.*

*Comment le prince peut-il délivrer la princesse ?*

Indice : la logique propositionnelle peut nous aider à résoudre cette énigme, à condition de considérer les deux propositions suivantes :

$P$  = la porte de droite mène aux appartements de la princesse ;

$Q$  = la porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie.

Chacune de ces propositions peut être vraie ou fausse. En considérant tous les cas possibles, on peut trouver la proposition que notre prince doit énoncer.

#### 3. Parmi les discours suivants, lesquels sont des raisonnements corrects ?

- (a) Si Lucette a menti, alors Hugo est coupable. Or Hugo n'est pas coupable. Donc Lucette n'a pas menti.
- (b) Si Lucette a menti, alors Hugo est coupable. ou Lucette n'a pas menti. Donc Hugo n'est pas coupable.

## B - Formules et équivalences

Montrer que, quelles que soient  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\chi$ , les formules de chacune des paires suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

- (a)  $\neg\neg\varphi$  et  $\varphi$
- (b)  $\varphi \rightarrow \psi$  et  $\neg\varphi \vee \psi$
- (c)  $\varphi \rightarrow \psi$  et  $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$  (contraposition)
- (d)  $\varphi \leftrightarrow \psi$  et  $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- (e)  $\varphi \vee \psi$  et  $\psi \vee \varphi$  (commutativité)
- (f)  $\varphi \vee (\psi \vee \chi)$  et  $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$  (associativité)
- (g)  $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$  et  $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$  (distributivité)
- (h)  $\neg(\varphi \wedge \psi)$  et  $\neg\varphi \vee \neg\psi$  (lois de Morgan)
- (i)  $\neg(\varphi \vee \psi)$  et  $\neg\varphi \wedge \neg\psi$  ("")
- (j)  $\varphi \rightarrow \psi$  et  $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$
- (k)  $\varphi \rightarrow \neg\psi$  et  $\psi \rightarrow \neg\varphi$
- (l)  $\varphi \leftrightarrow \psi$  et  $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
- (m)  $\varphi \vee \varphi$  et  $\varphi$  (idempotence)
- (n)  $\varphi \wedge \varphi$  et  $\varphi$  (idempotence)
- (o)  $\varphi \wedge \psi$  et  $\psi \wedge \varphi$  (commutativité)