1 Logique des propositions

A - Traductions en Logique Propositionnelle

1. Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase correspond chaque variable propositionnelle.

   (a) Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup

   > **Solution:** B = ce moteur est bruyant ; C = ce moteur consomme beaucoup
   > $\neg B \wedge C$ On perd le sens de « mais », CC donc « et »

   (b) Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient

   > **Solution:** P = Pierre viendra ; M = Marie vient ; J = Jean vient
   > $(M \vee J) \rightarrow \neg P$ ou $\neg((M \vee J) \rightarrow P)$ Conditions de vérité différentes

   (c) Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant

   > **Solution:** J = Jean est stupide ; M = Jean est méchant
   > $J \wedge M$ La négation n'apparaît pas dans la forme logique

   (d) Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture

   > **Solution:** P = je vais à la plage à pied ; B = je vais au cinéma à pied ; Q = je vais à la plage en voiture ; C = je vais au cinéma en voiture
   > $((P \vee Q) \vee (V \vee C))$

   (e) Jean ne viendra que si Paul ne vient pas

   > **Solution:** J = Jean viendra ; P = Paul vient
   > $P \rightarrow \neg J$ ou $J \rightarrow \neg P$ surtout pas $\neg J \rightarrow P$: exemple avec A = on valide le M1 ; B = on rate la sémantique alors on a bien $B \rightarrow \neg A$ ou $A \rightarrow \neg B$ et surtout pas $\neg B \rightarrow A$

   (f) Pierre n'a ni frère ni soeur.

   > **Solution:** P = Pierre a un frère ; Q = Pierre a une soeur
   > $\neg P \wedge \neg Q$

   (g) Jean n'ira au cinéma que s'il a terminé ses devoirs.

   > **Solution:** P = Jean ira au cinéma ; Q = Jean a terminé ses devoirs
   > $\neg Q \rightarrow \neg P$ Attention : $Q \rightarrow P$ est une implicature

   (h) S'il pleut et qu'il y a du soleil, alors il y a un arc-en-ciel.

   > **Solution:** P = il pleut ; S = il y a du soleil ; A = il y a un arc-en-ciel
   > $(P \wedge S) \rightarrow A$

   (i) Il pleut ou il ne pleut pas.

   > **Solution:** P = il pleut
   > $P \vee \neg P$ En fait XOR, ou exclusif

   (j) McX a été élu, ou Wyman a été élu et une nouvelle ère a commencé.
   McX a été élu ou Wyman a été élu, et une nouvelle ère a commencé.

   > **Solution:** P = McX a été élu ; Q = Wyman a été élu ; R = une nouvelle ère a commencé
   > $P \vee (Q \wedge R)$
   > $(P \vee Q) \wedge R$

2. Le prince Beaudiscours

   Le prince Beaudiscours est dans un cruel embarras. Le voici au pied du manoir où la fée Antinomie retient prisonnière la douce princesse Vérité.

   Deux portes donnent accès au château. L'une conduit aux appartements de la princesse, l'autre s'ouvre sur l'antre d'un dragon.

   Le prince sait seulement que l'un de ces portes s'ouvre si on énonce une proposition vraie, et l'autre si on énonce une proposition fausse.

   Comment le prince peut-il délivrer la princesse ?

   Indice : la logique propositionnelle peut nous aider à résoudre cette énigme, à condition de considérer les deux propositions suivantes :
   P = la porte de droite mène aux appartements de la princesse ;
   Q = la porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie.
   Chacune de ces propositions peut être vraie ou fausse. En considérant tous les cas possibles, on peut trouver la proposition que notre prince doit énoncer.

Solution: P = la porte de droite mène aux appartements de la princesse
Q = la porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie.

On dessine un tableau dans lequel tous les cas de figures se présentent. P et Q peuvent chaqun être vrai ou faux et la princesse peut se trouver derrière la porte gauche ou droite. Si P est vrai, alors la princesse se trouve naturellement derrière la porte de droite, et celle de gauche quand $\neg$ P.

P	Q	Porte de la princesse	On doit dire quelque chose de...	$\leftrightarrow$
0	0	G	V	1
0	1	G	F	0
1	0	D	F	0
1	1	D	V	1

On cherche une formule qui a les mêmes conditions de vérité : P equiv Q. Par exemple : "La porte droite mène aux appartements de la princesse ssi la porte droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie".

Première ligne du tableau : si P est faux la princesse est donc derrière la porte gauche. Si Q est aussi faux, alors quand on prononce la phrase ci-dessus, celle-ci est vraie. Alors, comme la porte droite s'ouvre ssi elle mène aux appartements de la princesse, elle ne s'ouvrira pas. La porte gauche s'ouvre et le prince peut sauver la princesse.

Deuxième ligne du tableau : si P est faux, la princesse est donc derrière la porte gauche. Si Q est vrai, alors quand on dit la vérité on ouvrira la porte de droite qui donne sur le dragon. Il faut donc mentir. Si P et Q ont des valeurs de vérité différentes, l'opérateur $\leftrightarrow$ produit une proposition fausse. Alors, quand on prononce la phrase proposée, la porte de gauche s'ouvrira.

Troisième ligne du tableau : si P est vrai, la princesse est donc derrière la porte droite. Si Q est faux, alors il faut mentir pour ouvrir la porte de droite. Comme l'opérateur $\leftrightarrow$ produit un résultat faux quand P et Q n'ont pas la même valeur de vérité, la phrase proposée marchera.

Quatrième ligne du tableau : si P est vrai, alors la princesse est derrière la porte droite. En plus, si Q est vrai, il faut dire la vérité pour ouvrir cette porte. Si on prononce la phrase proposée, et P et Q sont tous les deux vrais, alors la phrase proposée sera vraie et la porte de la princesse s'ouvrira.

Dans tous les cas de figure on ouvre donc la porte de la princesse en prononçant la phrase.

3. Parmi les discours suivants, lesquels sont des raisonnement corrects ?
   (a) Si Lucette a menti, alors Hugo est coupable. Or Hugo n'est pas coupable. Donc Lucette n'a pas menti.

Solution: L : Lucette a menti H : Hugo est coupable
Prémisse 1 : $L \to H$ (Si Lucette a menti, alors Hugo est coupable.)
Prémisse 2 : $\neg H$ (Hugo n'est pas coupable.)
Conclusion : $\neg L$ (Lucette n'a pas menti.)

L	H	$L \to H$	$\neg H$	$\neg L$	Les deux prémisses sont vraies
1	1	1	0	0	F
1	0	0	1	0	F
0	1	1	0	1	F
0	0	1	1	1	V

Pour un raisonnement, si dans toutes les lignes du tableau de vérité où les prémisses sont vraies la conclusion l'est, c'est un raisonement valide. Ceci est donc un raisonnement valide.

   (b) Si Lucette a menti, alors Hugo est coupable. or Lucette n'a pas menti. Donc Hugo n'est pas coupable.

Solution: L : Lucette a menti H : Hugo est coupable
Prémisse 1 : $L \to H$ (Si Lucette a menti, alors Hugo est coupable.)
Prémisse 2 : $\neg L$ (Lucette n'a pas menti.)
Conclusion : $\neg H$ (Hugo n'est pas coupable.)

L	H	$L \to H$	$\neg L$	$\neg H$	Les deux prémisses sont vraies
1	1	1	0	0	F
1	0	0	0	1	F
0	1	1	1	$\underline{0}$	V
0	0	1	1	1	V

Il y a un cas de figure où les deux prémisses sont vraies, mais la conclusion est fausse, le raisonnement n'est donc pas valide.

B - La tâche de Sélection de Wason

1. On cherche à tester des hypothèses faites sur les cartes d'un paquet. Il y a ci-dessous un ensemble de 4 cartes tirées de ce paquet. Sur chaque carte figure une lettre d'un côté et un chiffre de l'autre côté :

   Règle : S'il y a un A sur une face alors il y a un 4 sur l'autre face

   Laquelle ou lesquelles de ces cartes est-il nécessaire de retourner pour décider si la règle est vraie ou fausse ?

Solution: $A \to 4$.

On regarde la table de vérité de l'implication :

A	4	A → 4
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

— carte A : A=1, il faut que 4=1 pour que la règle soit vraie, si on a une carte avec A il faut qu'il y ait un 4 derrière
— carte 4 : 4=1, que A=1 ou A=0 la règle est vrai, on n'a pas besoin de regarder s'il y a un 4
— pas carte 4 : 4=0, il faut que A ne soit pas égal à 1 pour que la règle soit vraie, il faut regarder les cartes qui ont un chiffre différent de 4
— pas carte A : A=0, que 4=1 ou 4=0 la règle est toujours vraie, on n'a pas besoin de regarder s'il y a une lettre différente de A

Donc on regarde A (il faut qu'il y ait un 4) et 7 (il ne faut pas qu'il y ait un A).

2. Imaginez que vous êtes un policier. Votre mission consiste à vous assurer que vos concitoyens respectent la loi. Les quatre cartes ci-dessous vous donnent des informations sur des personnes consommant une boisson dans un bar. Sur une des deux faces figure l'âge de la personne et sur l'autre la boisson qu'elle consomme.

   Règle : Si une personne boit de l'alcool alors elle doit avoir plus de 18 ans

Laquelle ou lesquelles de ces cartes est-il nécessaire de retourner pour vérifier que tout le monde respecte la loi ?

Solution: $A \to M$
idem :
- si majeur : M=1, que A=0 ou A=1 la règle est vraie, alcool n'a pas d'importance, si la personne est majeure on n'a pas besoin de regarder
- si non majeur : M=0, alors alcool doit être différent de 1, si la personne n'est pas majeure elle ne doit pas boire d'alcool
- si alcool, A=1 alors majeur doit être différent de 0, q'il boit de l'acool il doit être majeur
- si pas alcool, A=0 alors majeur n'a pas d'importance, que M=0 ou M=1 la règle est vraie

Donc on regarde 14 ans et Whisky

C - Formules et équivalences

1. Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules bien formées de L_p ?
N.B. : Il arrive que l'on s'abstienne de noter la paire de parenthèse la plus externe ; mais au sens strict, on doit trouver exactement autant de paires de parenthèses qu'il y a de connecteurs binaires.
(a) $\neg(\neg P \vee Q)$

Solution: bien formée

(b) $P \vee (Q)$

Solution: mal formée, parenthèses servent pour encadrer les arguments d'un opérateur binaire

(c) $\neg(Q)$

Solution: mal formée, idem précédent

(d) $(P \to ((P \to Q)))$

Solution: mal formée, trop de parenthèses

(e) $(P \vee (Q \vee R))$

Solution: bien formée

(f) $((P \to P) \to (Q \to Q))$

Solution: bien formée

(g) $-P \vee Q \vee R$

Solution: mal formée

(h) $((P_{28} \to P_3) \to P_4)$

Solution: bien formée

(i) $(\neg P \vee \neg\neg P)$

Solution: bien formée

(j) $(P_2 \to (P_2 \to (P_2 \to P_2)))$

Solution: bien formée

(k) $(P \to (P \to Q) \to Q)$

Solution: mal formée, on a une parenthèse qui prend 3 arguments, ambigu

(l) $(P \vee P)$

Solution: bien formée

2. Montrer que, quelles que soient φ, ψ et χ, les formules de chacune des paires suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

Solution: Il suffit de dessiner les tables de vérité pour les deux formules et voir qu'à la fin elles donnent le même résultat.

(a) $\neg\neg\varphi$ et φ
(b) $\varphi \to \psi$ et $\neg\varphi \vee \psi$
(c) $\varphi \to \psi$ et $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$
(d) $\varphi \to \psi$ et $\neg\psi \to \neg\varphi$ (contraposition)
(e) $\varphi \to \neg\psi$ et $\psi \to \neg\varphi$
(f) $\varphi \leftrightarrow \psi$ et $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$
(g) $\varphi \leftrightarrow \psi$ et $(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
(h) $\varphi \vee \varphi$ et φ (idempotence)
(i) $\varphi \wedge \varphi$ et φ "
(j) $\varphi \vee \psi$ et$\psi \vee \varphi$ (commutativité)
(k) $\varphi \wedge \psi$ et $\psi \wedge \varphi$ "
(l) $\varphi \vee (\psi \vee \chi)$ et $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$ (associativité)
(m) $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ et $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ (distributivité)
(n) $\neg(\varphi \wedge \psi)$ et $\neg\varphi \vee \neg\psi$ (lois de Morgan)
(o) $\neg(\varphi \vee \psi)$ et $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ "

D - Connecteurs suffisants

1. Montrer que les connecteurs $\wedge$ et $\neg$ sont suffisants, c'est-à-dire que toute formule comprenant d'autres connecteurs ($\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$) est équivalente à une formule ne comprenant que $\wedge$ et $\neg$.

Solution:
$P \vee Q$ veut dire : Je ne veux pas le cas où P et Q sont tous les deux faux.

(P	$\vee$	Q)
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

$\neg$	($\neg$	P	$\wedge$	$\neg$	Q)
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0

Solution:
$P \to Q$ veut dire : Je ne veux pas avoir le cas où j'ai P, mais pas Q.

(P	$\to$	Q)
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

$\neg$	(P	$\wedge$	$\neg$	Q)
1	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0

Solution:
$P \leftrightarrow Q$ veut dire : Je veux avoir le cas où P et Q sont tous les deux vrais, ou le cas ou P et Q sont tous les deux faux. Alors, pour formuler cela, on réutilise la formule trouvée pour $\vee$.

(P	$\leftrightarrow$	Q)
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

$\neg$	($\neg$	(P	$\wedge$	Q)	$\wedge$	$\neg$	($\neg$	P	$\wedge$	$\neg$	Q))
1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0

E - Tautologies

1. Montrer que les formules suivantes sont des tautologies.

Solution: Il suffit de dessiner les tables de vérité et de trouver pour chaque formulle qu'elle est toujours vraie.

   (a) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$
   (b) $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
   (c) $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
   (d) $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$

F- Table de vérité composite

1. Calculer la table de vérité composite de la formule suivante en écrivant une colonne par sous-formule.

(1) $((p \wedge (q \rightarrow r)) \vee (r \rightarrow p)$

Solution:

(	(	p	$\wedge$	(	q	$\rightarrow$	r	)	)	$\vee$	(	r	$\rightarrow$	p	)	)
		0	0		0	1	0			1		0	1	0		
		0	0		0	1	1			0		1	0	0		
		0	0		1	0	0			1		0	1	0		
		0	0		1	1	1			0		1	0	0		
		1	1		0	1	0			1		0	1	1		
		1	1		0	1	1			1		1	1	1		
		1	0		1	0	0			1		0	1	1		
		1	1		1	1	1			1		1	1	1		