1 Logique des prédicats

1 - Logique des prédicats : formules atomiques

1. Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats, en préservant autant de structure que possible, et en donnant chaque fois la légende.
   (a) Marc est plus fort que David.

   Solution : F(x,y) : x est plus fort que y ; m : Marc, d : David.
   F(m,d)

   (b) Paul a vu Léa et elle ne l'a pas vu.

   Solution : V(x,y) : x voit y ; p : Paul ; l : Léa
   $(V(p,l) \wedge \neg V(l,p))$

   (c) Charles est laid, mais pas Marie.

   Solution : L(x) : x est laid ; c : Charles ; m : Marie
   $(L(c) \wedge \neg L(m))$

   (d) Hugues est ennuyeux ou agaçant.

   Solution : E(x) : x est ennuyeux ; A(x) : x est agaçant ; h : Hugues
   $(E(h) \vee A(h))$

   (e) Si Jean est un homme, alors il est mortel.

   Solution : H(x) : x est un homme ; M(x) : x est mortel ; j : Jean
   $(H(j) \rightarrow M(j))$

   (f) Gwendoline est une femme heureuse.

   Solution : F(x) : x est un femme ; H(x) : x est heureux ; g : Gwendoline
   $(F(g) \wedge H(g))$

   (g) Mar et Jérémie sont des bons amis.

   Solution : m : Marc ; j : Jéeémie ; B(x,y) : x et y sont des bons amis.
   $B(m,j)$

   (h) Si Pierre n'a pas eu la nouvelle par Elsa, il l'a eue par Charles.

   Solution : p : Pierre ; n : la nouvelle ; e : Elsa ; c : Charles ; R(x,y,z) : x reçoit y par z
   $(\neg R(p,n,e) \rightarrow R(p,n,c))$

   (i) Bien que Paul et Virginie s'aiment profondément, ils se rendent l'un l'autre très malheureux.

   Solution : p : Paul ; v : Virginie ; A(x,y) : x aime y ; M(x,y) : x rend y malheureux
   $((A(p,v) \wedge A(v,p)) \wedge (M(p,v) \wedge M(v,p)))$

2. (a) Tout le monde aime Anne.

   Solution : A(x,y) : x aime y ; a : Anne ; P(x) : x est une personne.
   $\forall x(P(x) \rightarrow A(x,a))$
   $\neg\exists x(P(x) \wedge \neg A(x,a))$

   (b) Un chat est entré.

Solution : C(x) : x est un chat ; E(x) : x est entré
$\exists x(C(x) \wedge E(x))$

(c) Tout est éphémère.

Solution : E(x) : x est éphémère
$\forall x E(x)$

(d) Personne n'est politicien et n'est pas ambitieux

Solution : P(x) : x est politicien ; A(x) : x est ambitieux.
$\neg\exists x(P(x) \wedge \neg A(x))$
$\forall x(P(x) \rightarrow A(x))$

(e) Il n'est pas vrai que tous les ambitieux sont honnêts.

Solution : A(x) : x est ambitieux ; H(x) : x est honnête
$\neg\forall x(A(x) \rightarrow H(x))$
$\exists x(A(x) \wedge \neg H(x))$

(f) Tous les coiffeurs blonds sont intelligents.

Solution : C(x) : x est coiffeur ; I(x) : x est intelligent ; B(x) : x est bond
$\forall x((C(x) \wedge B(x)) \rightarrow I(x))$
$\neg\exists x((C(x) \wedge B(x)) \wedge \neg I(x))$

(g) Tous les éléphants ont une trompe.

Solution : E(x) : x est un éléphant ; T(x) : x a une trompe
$\forall x(E(x) \rightarrow T(x))$
$\neg\exists x(E(x) \wedge \neg T(x))$

(h) Tous les hommes n'aiment pas Marie.

Solution : H(x) : x est un homme ; A(x,y) : x aime y ; m : Marie
Deux lectures : 1) Aucun homme n'aime Marie & 2) Il y a certains hommes qui n'aiment pas Marie.
1) $\forall x(H(x) \rightarrow \neg A(x,m))$
$\neg\exists x(H(x) \wedge A(x,m))$
2) $\neg\forall x(H(x) \rightarrow A(x,m))$
$\exists x(H(x) \wedge \neg A(x,m))$

(i) Il y a une chanson qu'aucun enfant ne chante.

Solution : C(x) : x est une chanson ; Z(x,y) : x chante y ; E(x) : x est un enfant
1) $\exists x(C(x) \wedge \forall y(E(y) \rightarrow \neg Z(y,x)))$

(j) Certains enfants ne sont pas capricieux.

Solution : C(x) : x est capricieux ;E(x) : x est un enfant
$\exists x(E(x) \wedge \neg C(x))$
$\neg\forall x(E(x) \rightarrow C(x))$

3. (a) Pierre est un auteur qui a vendu certains livres à succès.

Solution : A(x) : x est auteur ; V(x,y) : x a vendu y ; L(x) : x est un livre à succès ; p : Pierre
$(A(p) \wedge \exists x(L(x) \wedge V(p,x)))$

(b) Jean donne quelque chose à Pierre.

Solution : D(x,y,z) : x donne y à z ; j : Jean ; p : Pierre
$\exists x D(j,x,p)$

(c) S'il y a un bruit, Alice pleure.

Solution : B(x) : x est un bruit ; P(x) : x pleure ; a : Alice
$(\exists x B(x) \to P(a))$
$\forall x(B(x) \to P(a))$

(d) S'il y a un bruit, tout le monde pleure.

Solution : B(x) : x est un bruit ; P(x) : x pleure ; H(x) : x est une personne
$\forall x((B(x) \to \forall y(H(y)) \to P(y))$
$\forall x \forall y((B(x) \wedge H(y)) \to P(y))$

(e) S'il y a un bruit, Alice le cherche.

Solution : B(x) : x est un bruit ; C(x,y) : x cherche y ; a : Alice
$\forall x(B(x) \to C(a,x))$

(f) Tout le monde s'aime (soi-même).

Solution : A(x,y) : x aime y ; P(x) : x est une personne.
$\forall x(P(x) \to A(x,x))$
$\neg \exists x(P(x) \wedge \neg A(x,x))$

4. (a) Un homme qui aime les animaux n'est pas mauvais.

Solution : H(x) : x est un homme ; A(x,y) : x aime y ; D(x) : x est un animal ; M(x) : x est mauvais.
$\forall x((H(x) \wedge \forall y(D(y) \wedge A(x,y)) \to \neg M(x))$

(b) Si tout le monde l'aime, Marie aime tout le monde.

Solution : H(x) : x est un humain ; A(x,y) : x aime y ; m : Marie
$(\forall x(H(x) \wedge A(x,m)) \to \forall y(H(y) \to A(m,y)))$

(c) Tout le monde admire quelqu'un qui admire tout le monde.

Solution : H(x) : x est un humain ; A(x,y) : x admire y
Deux lectures : 1) Tout le monde admire une personne en particulier, appelons le Pierre, et Pierre admire tout le monde.
2) Tout le monde connaît une personne lambda (Pierre, Jean ou ...) et l'admire et cette personne admire tout le monde.
3) Si quelqu'un admire tout le monde, tout le monde l'admire.
1) $\exists x(((H(x) \wedge \forall y H(y)) \wedge A(y,x)) \wedge \forall z(H(z) \to A(x,z)))$
2) $\forall y \exists x(((H(y) \wedge H(x)) \wedge A(y,x)) \wedge \forall z(H(z) \to A(x,z)))$
3) $\forall x(H(x) \to \forall y((H(y) \wedge \forall z(H(z) \to A(y,z))) \to A(x,y)))$

5. Les phrases suivantes sont ambiguës. Expliquer l'ambiguïté, et proposer, quand c'est possible, les deux représentations en logique des prédicats que l'on peut associer à ces phrases.

(a) Jean loue un appartement.

Solution : Soit Jean est locataire, soit il est propriétaire.
L(x,y,z) : x loue y à z ; A(x) : x est un appartement ; j : Jean ; P(x) : x est une personne
$\exists x(P(x) \wedge \exists y(A(y) \wedge L(x,y,j)))$
$\exists x(P(x) \wedge \exists y(A(y) \wedge L(j,y,x)))$

(b) Tout étudiant lit un article.

> **Solution :** Soit tout le monde lit le même article, soit tout le monde lit un article différent.
> E(x) : x est étudiant ; L(x,y) : x lit y ; A(x) : x est un article
> $\exists x \forall y((A(x) \wedge E(y)) \rightarrow L(x,y))$
> $\forall y \exists x((A(x) \wedge E(y)) \rightarrow L(x,y))$

(c) Marie aime les chiens et les chats sauvages.

> **Solution :** Ambiguïté quant au mot 'sauvage', soit les chiens et les chats sont sauvages, soit juste les chats.
> S(x) : x est sauvage ; K(x) : x est un chat ; C(x) : x est un chien ; A(x,y) : x aime y ; m : Marie
> $(\forall x((K(x) \wedge S(x)) \rightarrow A(m,x)) \wedge \forall y((C(y) \wedge S(y)) \rightarrow A(m,y)))$
> $(\forall x((K(x) \wedge S(x)) \rightarrow A(m,x)) \wedge \forall y(C(y) \rightarrow A(m,y)))$

(d) Tout le monde n'a pas aimé le film.

> **Solution :** Soit personne n'a aimé le film, soit il y a des gens qui ont pas aimé le film.
> F(x) : x est un film ; A(x,y) : x aime y ; P(x) : x est une personne
> $\exists x(F(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow \neg A(y,x)))$
> $\exists x(F(x) \wedge \neg \forall y(P(y) \rightarrow A(y,x)))$

2 - Quantifieurs et prédicats

1. Traduisez en logique de prédicats les propositions suivantes, et en cas d'ambiguïté, donnez toutes les traductions correspondantes.

(a) Bien que personne ne fasse de bruit, Jean n'arrive pas à se concentrer.

> **Solution :** B(x) : x fait du bruit ; C(x) : x se concentre ; j : Jean ; P(x) : x est une personne
> $(\neg \exists x(P(x) \wedge B(x)) \wedge \neg C(j))$

(b) Si personne ne fait de bruit, Jean répondra au moins à une question.

> **Solution :** B(x) : x fait du bruit ; R(x,y) : x répond à y ; j : Jean ; P(x) : x est une personne ; Q(x) : x est une question
> $(\forall x(P(x) \wedge \neg B(x)) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(j,y)))$

(c) Tous les étudiants sauf Jean sont présents.

> **Solution :** P(x) : x est présent, E(x) : x est un étudiant ; j : Jean
> $\forall x((E(x) \wedge \neg(x = j)) \rightarrow P(x))$

(d) Aucun enfant ne fait jamais aucune bêtise.

> **Solution :** Soit : 1) aucune bêtise est faite par aucun enfant, 2) Tous les enfants font parfois une bêtise
> Mais le temps, exprimé par *jamais* n'est pas modélisable dans cette logique de prédicats.
> B(x) : x fait une bêtise ; E(x) : x est un enfant
> 1) $\forall x(E(x) \rightarrow \neg B(x))$
> 2) $\neg \exists x(E(x) \wedge \neg B(x))$

2. Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats.

(a) Quand quelqu'un fait confiance à quelqu'un qui a trompé tout le monde, il a tort.

> **Solution :** P(x) : x est une personne ; C(x,y) : x fait confiance à y ; T(x,y) : x a trompé y ; F(x) : x a tort
>
> $\forall x(P(x) \wedge \exists y(P(y) \wedge (C(x,y) \wedge \forall z(P(z) \wedge T(y,z)))) \rightarrow F(x))$

(b) Il n'y a pas de grand champion qui n'ait causé de tort à personne.

> **Solution :** P(x) : x est une personne ; C(x) : x est un grand champion ; T(x,y) : x a causé de tort à y
>
> $\forall x(C(x) \to \exists y(P(y) \wedge T(x,y)))$
> $\neg\exists x(C(x) \wedge \neg\exists y(P(y) \wedge T(x,y)))$

3. **Donkey Sentences** Les phrases suivantes se caractérisent par le fait que l'indéfini, sous la portée d'une quantification universelle ou d'une conditionnelle, s'interprète de façon universelle. Cette situation n'est pas surprenante si on connaît l'équivalence entre $\forall x(\varphi \to \psi)$ et $(\exists x\varphi \to \psi)$ (si ψ ne contient pas d'occurrence libre de x). Sur la base de cette équivalence, proposez pour chaque phrase deux traductions en logique des prédicats équivalentes.
   (a) Paul se fâche dès que quelqu'un fait du bruit.

   > **Solution :** p : Paul ; F(x) : x se fâche ; B(x) : x fait du bruit ; P(x) : x est une personne
   > $\forall x((P(x) \wedge B(x)) \to F(p))$
   > $(\exists x(P(x) \wedge B(x)) \to F(p))$

   (b) Tout le monde se fâche si quelqu'un fait du bruit.

   > **Solution :** F(x) : x se fâche ; B(x) : x fait du bruit ; P(x) : x est une personne
   > $\forall x\forall y((P(x) \wedge (B(y) \wedge P(y))) \to F(x))$
   > $\forall x((P(x) \wedge \exists y(B(y) \wedge P(y))) \to F(x))$

   (c) Tous les touristes qui visitent Paris sont riches.

   > **Solution :** T(x) : x est un touriste ; R(x) : x est riche ; V(x,y) : x visite y ; p : Paris
   > $\forall x((T(x) \wedge V(x,p)) \to R(x))$

   (d) Tous les touristes qui visitent Paris l'aiment.

   > **Solution :** T(x) : x est un touriste ; A(x,y) : x aime y ; V(x,y) : x visite y ; p : Paris
   > $\forall x((T(x) \wedge V(x,p)) \to A(x,p))$

   (e) Tous les touristes qui visitent une ville sont riches.

   > **Solution :** T(x) : x est un touriste ; R(x) : x est riche ; V(x,y) : x visite y ; C(x) : x est une ville
   > $\forall x\forall y(((T(x) \wedge C(y)) \wedge V(x,y)) \to R(x))$
   > $\forall x((T(x) \wedge \exists y(C(y) \wedge V(x,y))) \to R(x))$

   (f) Tous les touristes qui visitent une ville l'aiment.

   > **Solution :** T(x) : x est un touriste ; A(x,y) : x aime y ; V(x,y) : x visite y ; C(x) : x est une ville
   > $\forall x\forall y(((T(x) \wedge C(y)) \wedge V(x,y)) \to A(x,y))$
   > La deuxième formulation en $(\exists x\varphi \to \psi)$ n'est pas possible, car soit $\exists$ reste libre, soit, il n'a pas de portée suffisamment grande pour atteindre A(x,y).

   (g) Si un fermier possède un âne, il le bat.

   > **Solution :** F(x) : x est un fermier ; B(x,y) : x bat y ; P(x,y) : x possède y ; A(x) : x est un âne
   > $\forall x\forall y(((F(x) \wedge A(y)) \wedge P(x,y)) \to B(x,y))$
   > La deuxième formulation en $(\exists x\varphi \to \psi)$ n'est pas possible, car soit $\exists$ reste libre, soit, il n'a pas de portée suffisamment grande pour atteindre B(x,y).

4. Traduisez en logique des prédicats les phrases suivantes. Conclusion ?

   (1) a. Si un étudiant a une mauvaise note, il doit la rattraper
   b. Tout étudiant qui a une mauvaise note doit la rattraper
   c. Tout étudiant doit rattraper toutes ses mauvaises notes

Solution : Pour les trois phrases, la formulation en logique des prédicats est pareille.
E(x) : x est un étudiant ; A(x,y) : x a y ; R(x,y) : x doit ratrapper y ; N(x) : x est une note ; M(x) : x est mauvais
$\forall x \forall y (((E(x) \wedge (N(y) \wedge M(y))) \wedge A(x,y)) \rightarrow R(x,y))$

5. Proposer (au moins) une phrase en français qui a les mêmes conditions de vérité que chacune des formules suivantes, où $F(x) = x$ est fermier, $P(x,y) = x$ possède y, $B(x,y) = x$ bat y, $j =$ Jean, $c =$ Chikita, $A(x) = x$ est un âne.
   (a) $F(j) \rightarrow (P(j,c) \wedge A(c))$

   Solution : Si Jean est fermier, alors il possède un âne qui s'appelle Chikita.

   (b) $\forall x \forall y (F(x) \wedge P(x,y)) \rightarrow B(x,y)$

   Solution : Un fermier bat tout ce qu'il possède.

6. Montrez que les formules de chacune des paires ci-dessous ne sont pas logiquement équivalentes, en donnant l'exemple d'une situation où l'une est vraie et pas l'autre.
   (a) $\forall x (A \vee B)$ *vs.* $(\forall x A \vee \forall x B)$

   Solution : A : blanc. B : noir.
   $\forall x (A \vee B)$: tout est blanc ou noir.
   $(\forall x A \vee \forall x B)$: tout est blanc ou tout est noir.

   (b) $\exists x (A \wedge B)$ *vs.* $(\exists x A \wedge \exists x B)$

   Solution : A : blanc. B : noir.
   $\exists x (A \wedge B)$: Il existe une chose qui est à la fois blanche et noire.
   $(\exists x A \wedge \exists x B)$: il existe une chose qui est blanche et il existe une chose qui est noire.