1 Logique des prédicats et modèles

1 - Syllogisme

1. 1. Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats
   (a) Tout ce que Jean n'a pas perdu, il l'a.

   Solution : j : Jean ; A(x,y) : x a y ; P(x,y) : x a perdu y.
   $\forall x(\neg P(j,x) \to A(j,x))$

   (b) Jean n'a pas perdu un million de francs.

   Solution : j : Jean ; P(x,y) : x a perdu y ; m : un million de francs
   $\neg P(j,m)$

   (c) Jean a un million de francs.

   Solution : j : Jean ; A(x,y) : x a y ; m : un million de francs
   $A(j,m)$

   2. Analyser le syllogisme qui consiste à déduire de la conjonction de a et de b la conclusion c. Expliquer où se situe l'erreur de raisonnement.

   Solution : Il y a une présupposition sur le verbe 'perdre' : il faut posséder une chose pour pouvoir la perdre. Cette information n'est pas exprimée dans les traductions ci-dessus et est la raison pourquoi le raisonnement est faux.

2 - Modèles

1. Modèle avec les lignes et les points
   (a) Donnez l'extension de chacun des prédicats.

   Solution : $I(P) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$
   $I(L) = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$
   $I(S) = \{\langle p_1, l_3\rangle, \langle p_2, l_3\rangle, \langle p_2, l_4\rangle, \langle p_2, l_2\rangle, \langle p_3, l_1\rangle, \langle p_3, l_2\rangle, \langle p_4, l_1\rangle, \langle p_4, l_3\rangle, \langle p_5, l_1\rangle, \langle p_5, l_4\rangle\}$
   $I(E) = \{\langle p_1, p_2, p_4\rangle, \langle p_3, p_4, p_5\rangle, \langle p_4, p_2, p_1\rangle, \langle p_5, p_4, p_3\rangle\}$

   (b) Déterminez la valeur de vérité des propositions suivantes dans le modèle ci-dessus :
      (a) $\forall x(Lx \leftrightarrow \exists y Sxy)$

      Solution : Il y a un ligne sur chaque point. C'est faux selon notre extension.

      (b) $\forall x \forall y((Lx \wedge Ly) \to \exists z(Pz \wedge Szx \wedge Szy))$

      Solution : Pour tout couple de lignes, il y a un point qui est sur les deux lignes du couple. C'est vrai.

      (c) $\forall x \forall y((Px \wedge Py) \to \exists z(Lz \wedge Sxz \wedge Syz))$

      Solution : Pour tout couple de points, il y a une ligne sur laquelle les deux points se trouvent. C'est faux, par exemple $\langle p_1, p_2\rangle$

      (d) $\exists x \exists y \forall z(Pz \to (Szx \vee Szy))$

      Solution : Il y a deux lignes et tous les points se trouvent sur l'une et ou sur l'autre. C'est vrai, les lignes l_1 et l_3 répondent à ce critère.

      (e) $\forall x \forall y \forall z(Exyz \leftrightarrow Ezyx)$

      Solution : C'est vrai et il ne faut pas oublier de le spécifier dans la question précédente.

(f) $\forall x(Lx \rightarrow \exists y \exists z \exists w(Syx \wedge Szx \wedge Swx \wedge Eyzw))$

> **Solution :** Sur chaque ligne il se trouve un point qui se situe entre deux autres points qui se trouvent également sur cette ligne. C'est faux, par exemple la ligne l_2 ne répond pas à ce critère.

(g) $\forall x(\exists y_1 \exists y_2(y_1 \neq y_2 \wedge Sxy_1 \wedge Sxy_2) \rightarrow \exists z_1 \exists z_2 Ez_1 x z_2)$

> **Solution :** Si un point se trouve sur deux lignes différentes, alors le point se trouve entre deux autres points. C'est faux, par exemple p_3 ne répond pas à ce critère.

2. Deuxième Modèle

(i) Traduisez les phrases suivantes en logique des prédicats et donnez leur valeur de vérité dans le modèle ci-dessus :

(a) Tout le monde est un personnage imaginaire qui nage ou qui vole.

> **Solution :** True, $\forall x F(x))$ True, $\wedge \forall x(N(x) \vee V(x)))$

(b) Aucun oiseau n'aime un poisson.

> **Solution :** True, $\forall x(O(x) \rightarrow \neg \exists y P(y) \wedge L(x,y)))$

(c) Si tous les poissons sont rouges ou jaunes, alors tous ceux qui nagent sont des poissons ou des sirènes.

> **Solution :** True, $\forall x \forall y(P(x) \wedge (R(x) \vee J(x)) \rightarrow (N(y) \rightarrow (P(y) \vee S(y))))$

(d) Si un oiseau regarde une sirène, il l'aime.

> **Solution :** False, $\forall x \forall y((O(x) \wedge S(y) \wedge W(x,y)) \rightarrow L(x,y)))$

(ii) Ajoutez un prédicat au modèle (donnez son extension) de façon à rendre vraies les phrases suivantes. Donnez la traduction en logique des prédicats de ces phrases :

(a) Polochon est jaune et Iago le connaît.

> **Solution :** $(J(p) \wedge K(p,i))$
> $I(K) = \{\langle \text{Iago}, \text{Polochon} \rangle\}$; avec K(x) : « x connaît y »)

(b) Si tous les poissons nagent, tous les poissons jaunes connaissent un oiseau.

> **Solution :** $\forall x((P(x) \wedge N(x)) \rightarrow \forall y \exists z(P(y) \wedge J(y) \rightarrow (O(z) \wedge K(y,z))))$
> $I(K) = \{\langle \text{Polochon}, \text{Iago} \rangle\ , \langle \text{Iago}, \text{Polochon} \rangle\}$; avec K(x) : « x connaît y »)

3 - Phrases contraires et contradictoires

1. Quelles sont, parmi les phrases suivantes, les phrases qui ont le même sens, les phrases contraires et les phrases contradictoires. Justifiez vos réponses en utilisant des tables de vérité.

> **Solution :** S : la publicité est une science
> A : la publicité est un art
> R : la publicité demande réflexion
>
> a- La publicité est, sinon une science, du moins un art qui suppose qu'on réfléchisse.
> $S(\vee(A \wedge R))$ ou $(\neg S \rightarrow (A \wedge R))$
> b- La publicité n'est pas une science, c'est un art qui suppose qu'on réfléchisse.
> $(\neg S \wedge (A \wedge R))$
> c- Si la publicité n'est pas une science, c'est un art qui suppose qu'on réfléchisse.
> $(\neg S \rightarrow (A \wedge R))$

d- La publicité n'est ni une science ni un art .
$\neg S \land \neg A$

e- La publicité n'est pas une science, et si c'est un art, il ne demande aucune réflexion.
$(\neg S \land (A \rightarrow \neg R))$

				(a)	(b)	(c)	(d)		(e)
S	A	R	$A \land R$	$S \lor (A \land R)$	$\neg S \land (A \land R)$	$\neg S \rightarrow (A \land R)$	$\neg S \land \neg A$	$A \rightarrow \neg R$	$\neg S \land (A \rightarrow \neg R)$
V	V	V	V	V	F	V	F	F	F
V	V	F	F	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F	V	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V	V	V

Equivalentes : a et c
Contradictoires : a et e, c et e
Contraires : a et d, c et d, b et d, b et e

4 - Logique des prédicats : différents types de NP

1. Traduisez en logique des prédicats les phrases suivantes :

Solution : Glose pour toutes les phrases suivantes :
j : Jean ; D(x) : x dort ; H(x) : x est un homme ; p :Pierre

(a) Jean dort.

Solution : D(j)

(b) Aucun homme ne dort.

Solution : $\forall x(H(x) \rightarrow \neg D(x))$

(c) Au moins deux hommes dorment.

Solution : $(\exists x(H(x) \land D(x)) \land \exists y(y \neq x \land (H(y) \land D(y))))$

(d) Exactement un homme dort.

Solution :
$\exists x((H(x) \land D(x)) \land \forall y((H(y) \land D(y)) \rightarrow y = x))$
$\exists x((H(x) \land D(x)) \land \forall y(y \neq x \rightarrow \neg(H(y) \land D(y))))$

(e) Seul Pierre dort.

Solution :
$\forall x(x \neq p \rightarrow \neg D(x))$
$\forall x(D(x) \rightarrow x = p)$

(f) Pas plus de trois hommes dorment.

Solution : Discuté en cours, c'est très long et fastidieux, mais possible.

(g) La plupart des hommes dorment.

Solution : Pas possible de traduire ceci avec notre système.