TD2 Langages rationnels & algébriques

Timothée Bernard

23 septembre 2015

1. Proposer, pour chacun des langages suivants, une grammaire algébrique (alphabet $X = \{a, b, c\}$).
   (a) $L_0 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n \ ; \ n \geq 0\}$
   (b) $L'_0 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n b^n ca \ ; \ n \geq 0\}$
   (c) $L_1 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n b^n c^p ; n \geq 1 \text{ et } p \geq 1\}$
   (d) $L_2 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n b^n a^m b^m ; n, m \geq 1\}$
   (e) $L'_3 = \{w \in X^* \ / \ |w|_a = |w|_b\}$
   (f) $L_3 = \{w \in X^* \ / \ |w|_a = 2|w|_b\}$

Solution:

1. $L_0 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n \ ; \ n \geq 0\}$
   $S \to aS|\varepsilon$
2. $L'_0 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n b^n ca \ ; \ n \geq 0\}$
   $S \to Xca \ ; \ X \to aXb|\epsilon$
3. $L_1 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n b^n c^p ; n \geq 1 \text{ et } p \geq 1\}$
   La forme la plus simple : on charge S_1 de produire $a^n b^n$, et S_2 de produire c^p. D'autres formes sont possibles.
$$\begin{array}{lcl} S & \to & S_1 S_2 \\ S_1 & \to & aS_1b \,|\, ab \\ S_2 & \to & cS_2 \,|\, c \end{array}$$
4. $L_2 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n b^n a^m b^m ; n, m \geq 1\}$
$$S \to XY$$
$$X \to aXb \mid ab$$
$$Y \to aYb \mid ab$$
5. $L'_3 = \{w \in X^* \ / \ |w|_a = |w|_b\}$
$$S \to aSbS|bSaS|\epsilon$$
6. $L_3 = \{w \in X^* \ / \ |w|_a = 2|w|_b\}$
$$S \to aSbSbS|bSaSbS|bSbSaS|\epsilon$$

2. Soit la grammaire hors contexte suivante :

S	→	p
p	→	gn v1 *que* p | gn v2
gn	→	np | det nc
np	→	*Léa* | *Luc* | *Ève* | *Max*
nc	→	*femme* | *homme* | *étudiante* | *étudiant* | *fille* | *garçon*
det	→	*le* | *la* | *l'*
v1	→	*pense* | *croit* | *voit* | *sait* | *dit* | *raconte*
v2	→	*se promène* | *marche* | *part*

(a) Donner quatre phrases reconnues par cette grammaire, contenant respectivement 0, 1, 2 et 3 fois le mot *que*.

Solution: Léa se promène
Luc voit que le homme part
La femme pense que Léa croit que Ève marche
Max sait que le fille raconte que Ève dit que Max marche

(b) Pour quelles raisons ces phrases ne sont-elles pas toutes'correctes en français ? Comment modifier la grammaire pour corriger cela ?

Solution: (1) Problèmes d'ellision : *le homme* au lieu de *l'homme*, et aussi *que Ève* au lieu de *qu'Ève*.

(2) Problème d'accord : *le fille* au lieu de *la fille*.

(Les deux problèmes étant similaires, on ne demandait pas de les traiter tous les deux.)

Les grammaires avec attributs (structures de traits) permettent une solution élégante de ces problèmes. Mais on peut aussi les résoudre directement au niveau de la grammaire (seules les règles modifiées sont indiquées) :

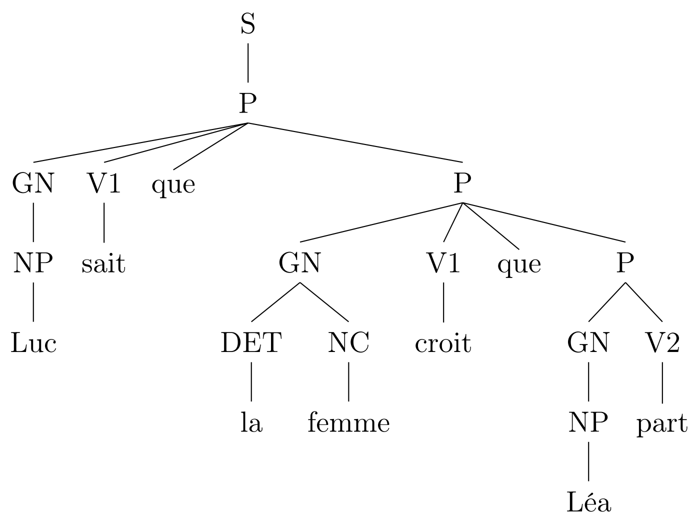
Accord

gn	→	np | det-m nc-m | det-f nc-f
nc-f	→	*femme* | *étudiante* | *fille*
nc-m	→	*homme* | *étudiant* | *garçon*
det-m	→	*le* | *l'*
det-f	→	*la* | *l'*

Ellision (le/la ⇝ l')

gn	→	np | det-m nc-m | det-f nc-f | det-e nc-e
nc-e	→	*étudiante* | *homme* | *étudiant*
nc-f	→	*femme* | *fille*
nc-m	→	*garçon*
det-e	→	*l'*
det-m	→	*le*
det-f	→	*la*

(c) Donner l'arbre de dérivation de *Luc sait que la femme croit que Léa part.*



Solution:

3. On s'autorise quelquefois à écrire dans la partie droite des règles d'une grammaire algébrique une expression rationnelle : par exemple, on pourrait imaginer dans une grammaire de la langue naturelle une règle de la forme $NP \rightarrow Det\ A^*\ N\ (A|Rel)^*$.

   (a) Est-ce légitime ?

   > **Solution:** La réponse est : oui, c'est légitime ! En effet, grâce au théorème de Kleene, on sait que l'on dispose d'une grammaire régulière équivalente à toute expression rationnelle. Il suffit de remplacer la partie droite β qui est sous forme d'une expression rationnelle par l'axiome d'une grammaire régulière qui engendre exactement le même langage que β. Attention, il faut noter que ces expressions rationnelles produisent (en général) un langage sur $(X \cup V)^*$ (et non sur X^*).

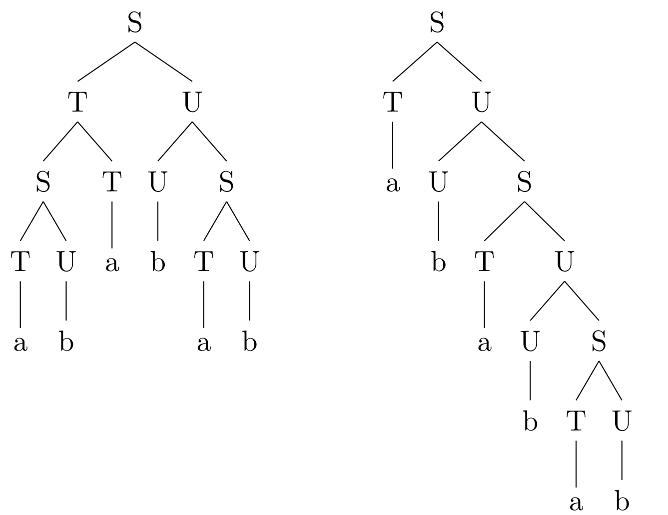
   (b) Peut-on proposer une (sous-)grammaire qui reconnaisse le même langage que la règle ci-dessus ?

   > **Solution:** Une grammaire qui reconnaît l'expression (construite en passant par l'automate) :
   > $E \rightarrow Det\, X$; $X \rightarrow A\, X \mid N\, Y$; $Y \rightarrow A\, Y \mid Rel\, Y \mid \varepsilon$.
   > La règle initiale s'écrit alors tout simplement $NP \rightarrow E$.

4. Ambiguïté de grammaires

   (a) Montrer que la grammaire suivante est ambiguë :

   $S \rightarrow TU$
   $T \rightarrow ST \mid a$
   $U \rightarrow US \mid b$

   > **Solution:**

   (b) La grammaire suivante est-elle ambiguë ? $S \rightarrow aSSb \mid ab$

   > **Solution:** Non (il me semble), cela dit le prouver est assez laborieux.