Formal Language Theory

N° 1. Soit $x = abbcc$ un mot sur l'alphabet $X = \{a, b, c\}$.

1. Quelle est la valeur de $|x|$? et de $|x|_a$?
2. Donner un mot de X^3 qui ne soit pas un facteur de x.
3. Donner un sous-mot de x qui n'est pas un facteur de x.
4. Donner tous les facteurs de x qui appartiennent à X^3.
5. Donner les ensembles $Pre(x)$ et $Suf(x)$ des préfixes et suffixes de x.

N° 2. Soit $v = abacbc$. Donner la liste des préfixes de v, la liste de ses suffixes, la liste de ses facteurs.

N° 3. Soit $X = \{a, b\}$. Calculer le produit $A.B$ pour les langages A et B suivants :

$A = \{a, ab, bb\}$	$B = \{\varepsilon, b, aa\}$
$A = \emptyset$	$B = \{a, ba, bb\}$
$A = \{\varepsilon\}$	$B = \{b, aba\}$
$A = \{aa, ab, ba\}$	$B = X^*$

N° 4. Soit l'alphabet $X = \{a, b\}$ et les langages $L_1 = \{a, ab, ba\}$ et $L_2 = \{\varepsilon, b, ab\}$.

1. Donner le résultat des opérations suivantes :

$$L_1.L_2 \quad L_2.L_1 \quad L_1.\{\varepsilon\} \quad \emptyset.L_2 \quad L_1^3$$

2. Si $L_3.L_4 = \{\varepsilon\}$, que peut-on dire des langages L_3 et L_4 ?
3. Si $L_3.L_4 = \emptyset$, que peut-on dire des langages L_3 et L_4 ?

N° 5. Vérifier les propriétés suivantes du produit de langages :

- Associativité
- Distributivité par rapport à $\cup$
- Non distributivité par rapport à $\cap$
- Admet un élément neutre
- Admet un élément absorbant

N° 6. Admettons la définition suivante : les mots u et v de X^* sont dits **conjugués** si et seulement si $\exists u_1, u_2$ t.q. $u = u_1u_2$ et $v = u_2u_1$. Montrer :

1. que la "conjugaison" est une relation d'équivalence
2. que si u et v sont conjugués, alors $\exists w \in X^*, k, l \in \mathbb{N}$, t.q. $u = w^l$ et $v = w^k$

N° 7.

1. Soient t, u, v, w quatre mots de X^* tels que que $tu = vw$. Montrer qu'il existe un mot unique $z \in X^*$ tel que :
   - soit $u = zw$ et $v = tz$
   - soit $t = vz$ et $w = zu$

   (Lemme de Levi)
2. En utilisant ce lemme montrer que si u_1, u_2 et v sont trois mots de X^*, si $u_1 \in Pre(v)$ et si $u_2 \in Pre(v)$ alors soit $u_1 \in Pre(u_2)$ soit $u_2 \in Pre(u_1)$.
3. En utilisant ce théorème, et en appliquant un raisonnement par récurrence sur $|u|$, montrer que si $a \in X, b \in X, u \in X^*$, alors $ua = bu \Rightarrow a = b$ et $u \in \{a\}^*$.

N° 8. On appelle code sur un alphabet A tout langage X sur A tel que si $x_1x_2 \ldots x_p = y_1y_2 \ldots y_q$ et $x_i \in X$ pour tout i et $y_j \in X$ alors $p = q$ et $x_i = y_j$ pour tout i. Dire que X est un code revient donc à dire que tout élément de X^* se factorise de manière unique sur X.
Les langages suivants sont-ils des codes ?

- $X_1 = \{ab, baa, abba, aabaa\}$
- $X_2 = \{b, ab, baa, abaa, aaaa\}$
- $X_3 = \{aa, ab, aab, bba\}$
- $X_4 = \{a, ba, bba, baab\}$