Formal Grammars

N° 9. Soit la grammaire

$$\begin{array}{ll} S & \to A\ S\ B \\ S & \to a\ B \\ aB & \to ba \\ A & \to a \end{array}$$

1. De quel type (dans la classification de Chomsky) est cette grammaire ?
2. Donnez deux exemples de mots engendrés par cette grammaire, en donnant à chaque fois la dérivation gauche.
3. Comment caractériser le langage engendré par cette grammaire ?
4. Peut-on proposer une grammaire indépendante du contexte (*context-free*) qui reconnaisse le même langage ?

N° 10. Donner une grammaire algébrique qui reconnaisse chacun des langages suivants (alphabet $X = \{a, b, c\}$).

- $L_0 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n \ ; \ n \geq 0\}$
- $L_0' = \{w \in X^* \ / \ w = a^n b^n ca \ ; \ n \geq 0\}$
- $L_1 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n b^n c^p ; n > 0 \text{ et } p > 0\}$
- $L_2 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n b^n a^m b^m ; n, m \geq 1\}$
- $L_3' = \{w \in X^* \ / \ |w|_a = |w]_b\}$
- $L_3 = \{w \in X^* \ / \ |w|_a = 2|w]_b\}$
- $L_4 = \{w \in X^* \ / \ \exists x \in X^* \text{ tq } w = x\overline{x}\}$
- $L_5 = \{w \in X^* \ / \ w = \overline{w}\}$

N° 11. Soient les deux grammaires suivantes. Pour chacune d'entre elles, donnez le langage engendré, et indiquez le type de la grammaire dans la classification de Chomsky. Commentez brièvement.

$$\begin{array}{lll} S & \to & S_1 S_2 \\ S_1 & \to & aS_1b \mid ab \\ S_2 & \to & cS_2 \mid c \end{array} \qquad \begin{array}{lll} S & \to & aSBC \\ S & \to & aBC \\ CB & \to & BC \\ aB & \to & ab \\ bB & \to & bb \\ bC & \to & bc \\ cC & \to & cc \end{array}$$

N° 12. Soit l'alphabet $X = \{+, =, a\}$. (1) Donner une grammaire algébrique pour le langage L dont chaque mot représente une addition correcte de deux suites de caractères a. Par exemple L contient le mot $aa + aaaa = aaaaaa$. (2) Donner un automate à pile qui reconnaît le même langage.

N° 13. A context-free grammar $G = \langle X, V, S, P \rangle$ is called *simple* if it verifies the two following conditions:

$P \subset V \times XV^*$

$\forall A \in V, \forall x \in X, \forall u, u' \in (X \cup V)^*, (A \to xu) \in P \wedge (A \to xu') \in P \Rightarrow (u = u')$

A context-free language is a *simple language* if there exists a simple grammar that generates it.

1. Find a simple grammar for the language $\{a^n b^{n+1}, n \geq 0\}$
2. Find a simple grammar for the language $\{a^n b^n, n > 0\}$
3. Let L be the language generated by: $S \longrightarrow aSS \mid b$. Build a context-free grammar the generates the language Lc^*d.
4. Show the the concatenation of two simple languages is a simple language. Provide a rigourous explanation, not necessarily a mathematical proof.

N° 14. Transformer la grammaire suivante en grammaire sans règles simples.

$S \to AB \mid A \ ; \ A \to aB \mid bA \mid aSb \ ; \ B \to S \mid b$

N° 15. Soit la grammaire suivante : $\mathcal{G}_1 = \langle \{a,b\}, \{S\}, S, \{\ S \ \ \rightarrow \ \ aSbS|bSaS|\varepsilon\ \}\rangle$.

1. Quel est le langage reconnu ?
2. Proposer une grammaire $\mathcal{G}_2$ ε-libre qui reconnaît le même langage.
3. Dessiner deux arbres de dérivation qui correspondent à l'analyse du mot *aabbaabbbaab* au moyen des deux grammaires $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$.

N° 16. Proposer, pour chacun des langages suivants, une grammaire algébrique.

- langage des expressions arithmétiques (complètement) parenthésées $(((4 + -3) * 2), (3 + (4 - (6 * 6)))...)$
- langage des expressions arithmétiques postfixes `5 4 + 2 *`, `3 4 6 6 * - +`...
- langage des palindromes : *aabaa*, *abccba*, *aa*...
- $\{w \in X^*/w = a^n b^{2n}; n > 0\}$
- langage des fonctions d'un langage de programmation, dont les arguments peuvent être des constantes (a, b, c) ou des fonctions (f, g, h) d'arité variable: $f(g(a,b),c)$, a, $g(a,g(a),a)$...
- langage des expressions bien formées de la logique des propositions
- langage des expressions bien formées de la logique des prédicats
- $\{w \in X^*/w = a^p b^n c^n a^p; n, p > 0\}$
- $\{w \in X^*/w = a^n b^p \ ; n \geq p \geq 0\}$

N° 17. Donner une grammaire régulière (vocabulaire $V = \{a, b, c, d, ..., y, z\}$) pour le langage qui contient l'ensemble des mots, de deux lettres minimum, composés en alternance d'une consonne et d'une voyelle et débutant ou finissant par une consonne et une voyelle. Donner une grammaire algébrique engendrant le même langage.

N° 18. Proposer une grammaire pour le langage consistant de toutes les chaînes contenant seulement des a et des b, et dont le nombre de a est différent du nombre de b.

N° 19. Quel est le langage engendré par la grammaire (non algébrique) suivante ? On ne demande pas de démonstration.

$S \rightarrow aSBC$	$S \rightarrow aBC$	$CB \rightarrow BC$	
$aB \rightarrow ab$	$bB \rightarrow bb$	$bC \rightarrow bc$	$cC \rightarrow cc$

N° 20. Soit la grammaire suivante : $\mathcal{G}_1 = \langle \{a,b\}, \{S\}, S, \{\ S \ \ \rightarrow \ \ aSbS|bSaS|\varepsilon\ \}\rangle$.

1. Quel est le langage reconnu ?
2. Proposer une grammaire $\mathcal{G}_2$ ε-libre qui reconnaît le même langage.
3. Dessiner deux arbres de dérivation qui correspondent à l'analyse du mot *aabbaabbbaab* au moyen des deux grammaires $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$.

N° 21. Ambiguïté de grammaires

1. Montrer que la grammaire suivante est ambiguë : $S \rightarrow TU; T \rightarrow ST \mid a; U \rightarrow US \mid b$
2. La grammaire suivante est-elle ambiguë ? $S \rightarrow aSSb \mid ab$