## Exercice 1

Calculer les valeurs de vérité des formules suivantes :

(1) a. $\neg(\neg p \wedge p)$
b. $((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))$
c. $(((a \rightarrow b) \wedge a) \rightarrow (a \wedge b))$
d. $(((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \rightarrow r)$

................................................Corrigé................................................

Notation compacte : la valeur d'une formule est en colonne sous son signe principal.

| $\neg$ | ( | $\neg$ | $p$ | $\wedge$ | $p$ | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | | 0 | 1 | 0 | 1 | |

| ( | ( | $p$ | $\rightarrow$ | $q$ | ) | $\rightarrow$ | ( | $q$ | $\rightarrow$ | $p$ | ) | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 0 | | 1 | | 0 | 1 | 0 | | |
| | | 0 | 1 | 1 | | 0 | | 1 | 0 | 0 | | |
| | | 1 | 0 | 0 | | 1 | | 0 | 1 | 1 | | |
| | | 1 | 1 | 1 | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | |

| ( | ( | ( | $a$ | $\rightarrow$ | $b$ | ) | $\wedge$ | $a$ | ) | $\rightarrow$ | ( | $a$ | $\wedge$ | $b$ | ) | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 0 | 1 | 0 | | 0 | 0 | | 1 | | 0 | 0 | 0 | | |
| | | | 0 | 1 | 1 | | 0 | 0 | | 1 | | 0 | 0 | 1 | | |
| | | | 1 | 0 | 0 | | 0 | 1 | | 1 | | 1 | 0 | 0 | | |
| | | | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | |

| ( | ( | ( | $p$ | $\vee$ | $q$ | ) | $\wedge$ | ( | $p$ | $\vee$ | $r$ | ) | ) | $\rightarrow$ | $r$ | ) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 0 | 0 | 0 | | 0 | | 0 | 0 | 0 | | | 1 | 0 | |
| | | | 0 | 1 | 0 | | 1 | | 0 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | |
| | | | 0 | 1 | 1 | | 0 | | 0 | 0 | 0 | | | 1 | 0 | |
| | | | 0 | 1 | 1 | | 1 | | 0 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | |
| | | | 1 | 1 | 0 | | 1 | | 1 | 1 | 0 | | | 0 | 0 | |
| | | | 1 | 1 | 0 | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | |
| | | | 1 | 1 | 1 | | 1 | | 1 | 1 | 0 | | | 0 | 0 | |
| | | | 1 | 1 | 1 | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | |

## Exercice 2

Calculer les valeurs de vérité des formules suivantes :

(2) a. $((P \leftrightarrow R) \vee R)$
b. $((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P))$
c. $((\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg(Q \vee P))$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . Corrigé . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

| $P$ | $R$ | $(P \leftrightarrow R)$ | $((P \leftrightarrow R) \vee R)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

| $P$ | $Q$ | $(P \to Q)$ | $(Q \to P)$ | $((P \to Q) \to (Q \to P))$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $(\neg P \wedge \neg Q)$ $\varphi$ | $(Q \vee P)$ | $\neg(Q \vee P)$ $\psi$ | $(\varphi \to \psi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

## Exercice 3

Calculez la valeur de vérité des phrases suivantes dans chacune des situations proposées.

(3)
a. Jean fait la vaisselle parce que Marie se repose et Léa lit le journal.
b. Si Marie se repose, Léa ne lit pas le journal et Jean ne fait pas la vaisselle.
c. Soit Jean fait la vaisselle et Marie se repose, soit Jean ne fait pas la vaisselle et Léa lit le journal.
d. Il est faux que si Marie se repose et Léa lit le journal, Jean fait la vaisselle.

Situations :
1. Jean fait la vaisselle, Marie se repose, Léa lit le journal.
2. Jean ne fait pas la vaisselle, Marie ne se repose pas, Léa lit le journal.
3. Jean fait la vaisselle, Marie ne se repose pas, Léa ne lit pas le journal.

............................................Corrigé............................................

Pour répondre à la question il faut d'abord proposer une représentation en logique des propositions de chaque phrase (ce qui conduit dans certains cas à expliciter les éventuelles ambiguïtés). On propose : $L =$ "Léa lit le journal", $J =$ "Jean fait la vaisselle", et $M =$ "Marie se repose".

a. Jean fait la vaisselle parce que Marie se repose et Léa lit le journal.
La conjonction *parce que* apporte une relation causale qui ne peut être formalisée en logique des propositions, il ne reste donc que les conditions de vérité : on peut dire que "A parce que B" ne peut être vraie que si A et B sont vraies. D'où la proposition $(J \wedge (M \wedge L))$ — qui est logiquement équivalente à la formule $((J \wedge M) \wedge L)$, ce qui explique qu'on s'autorise quelque fois à l'écrire tout simplement $(J \wedge M \wedge L)$.

b. Si Marie se repose, Léa ne lit pas le journal et Jean ne fait pas la vaisselle.
Il y a une ambiguïté syntaxique dans cette phrase, qui peut être analysée soit comme la conjonction d'une conditionnelle et d'une phrase simple — la formule est alors $((M \rightarrow \neg L) \wedge \neg J)$, soit comme une conditionnelle dont la principale est une conjonction — formule $(M \rightarrow (\neg L \wedge \neg J))$.

c. Soit Jean fait la vaisselle et Marie se repose, soit Jean ne fait pas la vaisselle et Léa lit le journal.
La phrase est une disjonction, on peut donc proposer la formule $((J \wedge M) \vee (\neg J \wedge L))$. La question de la "traduction" de *soit... soit* est une question délicate, et on pourrait être tenté de proposer ici un "ou exclusif" plutôt que la version inclusive présentée. On s'abstiendra cependant de le faire, en s'appuyant sur la thèse dominante en sémantique/pragmatique (voir par exemple Levinson) selon laquelle la signification de la disjonction en langue naturelle est inclusive, et qu'elle fait l'objet, dans les contextes appropriés, d'un « renforcement pragmatique » qui conduit à une lecture exclusive.

d. Jean fait la vaisselle, Marie ne se repose pas, Léa ne lit pas le journal.
Cette phrase comporte une négation qui prend sans ambiguïté dans sa portée le reste de la phrase, on peut donc proposer la formule $\neg((M \wedge L) \rightarrow J)$.

Pour le calcul et la réponse à la question, on pouvait soit remplir une table de vérité pour chacune des formules envisagées, en ne faisant figurer dans la table que la situation considérée (voir ci-dessous), soit faire le calcul de manière explicite pour chaque situation. Par exemple, la formule $(M \rightarrow (\neg L \wedge \neg J))$ vaut, dans la situation n°2, $(0 \rightarrow (\neg 1 \wedge \neg 0))$, ce qui est égal à $(0 \rightarrow (0 \wedge 1))$, et donc à $(0 \rightarrow 0)$, et donc à 1. La phrase b, sous cette analyse, est donc vraie dans la situation 2.

La table suivante donne la valeur de toutes les formules envisagées dans les 3 situations, sans faire figurer les calculs intermédiaires. La paire de parenthèses externes est omise (le cas échéant).

| | $J$ | $M$ | $L$ | $J \wedge M \wedge L$ $(a)$ | $(M \rightarrow \neg L) \wedge \neg J$ $(b1)$ | $M \rightarrow (\neg L \wedge \neg J)$ $(b2)$ | $(J \wedge M) \vee (\neg J \wedge L)$ $(c)$ | $\neg((M \wedge L) \rightarrow J)$ $(d)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sit. 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| sit. 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| sit. 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |