Exercice 1

Les deux formules suivantes sont-elles contraires, contradictoires ? Justifiez votre réponse au moyen d'une table de vérité.

(1) a. $((\neg P \rightarrow Q) \leftrightarrow P)$
b. $(\neg P \wedge \neg Q)$

Corrigé

Les deux formules peuvent toutes deux être vraies en même temps (quand $P = 0$ et $Q = 0$), elles ne sont donc ni contraires ni contradictoires.
En toute rigueur, ceci suffit à justifier la réponse, mais on demandait explicitement une table de vérité, la voici (il faut évidemment mettre les deux formules dans la **même** table de vérité).

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P \rightarrow Q)$	$((\neg P \rightarrow Q) \leftrightarrow Q)$	$(\neg P \wedge \neg Q)$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0

Lecture de la table : dans la première ligne, on observe que les deux formules sont vraies en même temps. Même si c'est le seul cas de ce genre, cela suffit à conduire à la conclusion que les deux formules ne sont ni contraires ni contradictoires.

Exercice 2

Les phrases (2-a) et (2-b) sont-elles contraires, contradictoires, ou ni l'un ni l'autre ? Justifiez votre réponse.

(2) a. Il ne suffit pas d'avoir de bons légumes pour faire une bonne soupe.
b. Si la soupe est mauvaise, les légumes sont mauvais.

Corrigé

On suppose que les propositions élémentaires sont d'une part *la soupe est bonne* (S) et d'autre part *les légumes sont bons* (L). On suppose de plus que la proposition *les légumes sont mauvais* est équivalente à *les légumes ne sont pas bons* (donc $\neg L$) et qu'il en va de même pour la soupe.
Alors pour traduire la première proposition il faut d'abord se rappeler que *il suffit que P pour Q* a les mêmes conditions de vérité que $(P \rightarrow Q)$ [1]. Alors, puisqu'on a affaire à la négation d'une phrase de la forme *il suffit...*, on obtient $\neg(L \rightarrow S)$.
La seconde proposition se traduit naturellement $(\neg S \rightarrow \neg L)$.
Sans faire la table de vérité, on peut remarquer que cette dernière proposition est équivalente à $(L \rightarrow S)$ (contraposition). Par conséquent, on voit immédiatement que les deux propositions sont contradictoires, puisque l'une est la négation de l'autre.
On peut aussi bien sûr calculer la table de vérité des deux formules.

1. Alors que la phrase *il faut que P pour Q* a les conditions de vérité de $(Q \rightarrow P)$, ce qui explique que quand on énonce qu'*il faut et il suffit que P pour Q* on énonce que P est une condition nécessaire et suffisante pour Q (et réciproquement), ce qui correspond à l'équivalence (matérielle) entre P et Q, puisqu'on a alors à la fois $(P \rightarrow Q)$ et $(Q \rightarrow P)$.

Exercice 3

A l'exercice 3 de la feuille n°1, nous avons vu que la phrase *Tu n'es ni mon ami ni mon ennemi* pouvait se représenter en logique des propositions par $(\neg A \wedge \neg E)$.

1. Cette formule est-elle équivalente à $\neg(A \wedge E)$? Justifiez votre réponse à l'aide d'une table de vérité.
2. Comment traduiriez-vous $\neg(A \wedge E)$ en langue naturelle ?

.... Corrigé ....

1. Dans la table de vérité ci-dessous, on peut voir que les formules $(\neg A \wedge \neg E)$ et $\neg(A \wedge E)$ n'ont pas les mêmes valeurs de vérité aux lignes 2 et 3 (voir les cellules grisées). Ces formules ne sont donc pas équivalentes.

A	E	$\neg A$	$\neg E$	$(\neg A \wedge \neg E)$	$(A \wedge E)$	$\neg(A \wedge E)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0

2. *Il n'est pas vrai qu'à la fois tu es mon ami et mon ennemi.*

Exercice 4

Montrez, en utilisant une table de vérité composite, que les énoncés suivants sont équivalents.

(3) a. Jean est malade et il a vu le médecin ou il est à l'hôpital
b. Soit Jean est malade et il a vu le médecin, soit il est malade et à l'hôpital

.... Corrigé ....

(4) a. Jean est malade et il a vu le médecin ou il est à l'hôpital
b. Soit Jean est malade et il a vu le médecin, soit il est malade et à l'hôpital

P = Jean est malade ; Q = Jean a vu le médecin ; R = Jean est à l'hôpital

P	Q	R	$(Q \vee R)$	$(P \wedge Q)$	$(P \wedge R)$	$(P \wedge (Q \vee R))$ (4-a)	$((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$ (4-b)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Interprétation de la table : les colonnes entières des formules correspondant à (4-a) et (4-b) sont identiques, ce qui signifie que ces deux formules ont les mêmes valeurs de vérité dans toutes les situations, elles sont donc logiquement équivalentes.

Exercice 5

Montrer que, quelles que soient φ, ψ et χ, les paires de formules suivantes sont logiquement équivalentes (parenthèses les plus externes systématiquement omises) :

(1)	$\neg\neg\varphi$	φ	
(2)	$\varphi \to \psi$	$\neg\varphi \vee \psi$	
(2')	$\varphi \to \psi$	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	
(3)	$\varphi \to \psi$	$\neg\psi \to \neg\varphi$	contraposition
(4)	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	
(5)	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	
(6)	$\varphi \vee \varphi$	φ	idempotence
(7)	$\varphi \wedge \varphi$	φ	"
(8)	$\varphi \vee \psi$	$\psi \vee \varphi$	commutativité
(9)	$\varphi \wedge \psi$	$\psi \wedge \varphi$	"
(10)	$\varphi \vee (\psi \vee \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \vee \chi$	associativité
(11)	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$	"
(12)	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	distributivité
(13)	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	"
(14)	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	lois de Morgan
(15)	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	"

Corrigé

Pour démontrer que deux formules sont logiquement équivalentes, il suffit de montrer qu'elles ont la même colonne dans la table de vérité composite. Bien entendu, il faut que les colonnes **entières** soient identiques (ce qui signifie alors que les expressions ont les mêmes valeurs dans toutes les situations).

Par exemple (n° 2) :

φ	ψ	$(\varphi \to \psi)$	$\neg\varphi$	$(\neg\varphi \vee \psi)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1