1 Compositionalité, λ-calcul

1. **Syntaxe des lambda-termes** Donnez l'arbre de décomposition syntaxique de

(1) a. $\lambda f.\lambda g.\lambda x.(f)(g)x$
b. $\lambda f.\lambda g.\lambda x.((f)g)x$
c. $\lambda f.(\lambda g).\lambda x.((f)g)x$
d. aab, à comparer avec $(a)(a)b$
e. $(M)ab$, à comparer avec Mab

2. **Convention de notation** Donnez les formes entièrement parenthésées des termes suivants. Si ce dont des rédex, les réduire autant que possible.

(2) a. $\lambda xz.xyz$
b. $(\lambda x.\lambda y.fxy)xy$
c. $(\lambda x.\lambda y.xyy)\lambda y.\lambda a.y$

3. **β-réduction :** Réduire autant que possible les termes suivants

(3) a. $(\lambda x.xx)\lambda x.x$
b. $((\lambda x.\lambda y.yx)f)\lambda x.x$
c. $(\lambda n.\lambda f.\lambda x.(f)((n)f)x)\lambda fx.fx$

4. **Rédex et β-réduction (niveau 2) :** Identifiez tous les rédex de la forme suivante, et réduisez-la autant que possible. Si de nouveaux rédex apparaissent identifiez-les.

(4) $((\lambda S.\lambda V.(S)(V)\lambda Q.(Q)m)\lambda P.(P)j)\lambda O.\lambda y.(O)\lambda z.((kiss)y)z$

5. **Les entiers selon Church** Vérifier que les combinateurs de Church pour les entiers fonctionnent en calculant $\mathsf{1{+}2}$, $\mathsf{0}\times\mathsf{2}$, $\mathsf{Succ(3)}$. Compter le nombre de β-réductions nécessaires.

$\mathsf{0} =_{\text{def}} \lambda f.\lambda x.x$	$\mathsf{Succ} =_{\text{def}} \lambda n.\lambda f.\lambda x.(f)((n)f)x$
$\mathsf{1} =_{\text{def}} \lambda f.\lambda x.(f)x$	$+ \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.((m)f)((n)f)x$
$\mathsf{n} =_{\text{def}} \lambda f.\lambda x.(f)(f)\ldots(f)x$, avec f n fois.	$\times \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.(m)(n)f$

6. **Langage typé. Définitions**

L'ensemble des expressions interprétables (*meaningful expressions*) de type a, ME_a, est défini inductivement :

– Pour chaque type a, les variables et les constantes de type a sont dans ME_a.
– Pour tous types a et b, si $\alpha \in ME_{\langle a,b\rangle}$ et $\beta \in ME_a$ alors $(\alpha)\beta \in ME_b$.
– Pour tous types a et b, si u est une variable de type a et $\alpha \in ME_b$, alors $\lambda u.\alpha$ est dans $ME_{\langle a,b\rangle}$.
– Si φ et ψ sont dans ME_t, alors les expressions suivantes sont aussi dans ME_t : $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$.
– Pour tout type a, si φ est dans ME_t et u est une variable de type a, alors $\forall u\varphi$ et $\exists u\varphi$ sont dans ME_t.

Vérifier que $((\text{aimer})x)j$ est de type t.

7. Réduire autant que possible les expressions suivantes :

(5) a. $\lambda x.\ ((P)x)m$
b. $\lambda x.\forall z.((\lambda y.((K)x)y)z \rightarrow ((R)z)x))j$

c. $[\lambda x\ [\lambda Y\ [(Y)x]](j)](P)$

En fixant une interprétation des prédicats K, R et P, et des constantes m et j, proposez pour chacune de ces formules une phrase en français ayant les mêmes conditions de vérité.

8. Soit j une constante de type e, M une constante de type $\langle e,t\rangle$, A une constante de type $\langle e,\langle e,t\rangle\rangle$. Quel est le type des variables x, y et Y pour que les expressions suivantes soient bien formées ? Réduire autant que possible ces expressions.

(6) a. $(\lambda x.(M)x)j$
    b. $(\lambda Y.(Y)j)M$
    c. $\lambda x\lambda Y.(Y)xjM$

9. **Combinateurs booléens** Définir avec les conventions vues en cours (opérateurs T et F) les opérateurs booléens $\wedge$ et $\vee$.

2 Ingénierie grammaticale

1. **Compositionalité :** L'arbre de la Fig. 1 donne la décomposition de la phrase *Un chien embrasse Marie*. À chaque noeud de l'arbre est associé un lambda-terme.

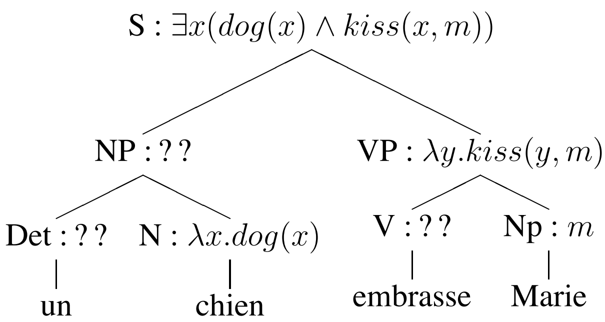

FIG. 1 – Représentation de *un chien aime Marie*

- En considérant que le lambda-terme associé à un noeud provient de l'application fonctionnelle d'un de ses fils à son autre fils (s'il en a), déduisez-en les lambda-termes manquants dans l'arbre.
- Indiquez le type associé à chaque noeud.
- À chaque étape, indiquez quelle branche de l'arbre est argument et quelle branche est fonction lors de l'application fonctionnelle.

2. Modifiez l'arbre de la figure ci-dessus en supposant que les noms propres sont tous de type $\langle\langle e,t\rangle t\rangle$. Quel est le type du verbe ?

3. Supposons que l'on préfère que la dénotation d'un nom propre soit de type e : par exemple, $[\![\text{léa}]\!] = l$. On peut alors imaginer de charger la règle $SN \rightarrow NP$ de garantir la « montée de type », de sorte que $[\![[_{SN}\text{léa}]]\!] = \lambda P.(P)l$. Il faut donc trouver un λ-terme (un combinateur) Ψ tel que $[\![\text{SN}]\!] = (\Psi)[\![\text{NP}]\!]$. Comment s'écrit Ψ ?

4. Comment représenter la contribution du verbe *être* dans la phrase « Jean est mortel » ?

5. On s'accorde généralement pour considérer que la contribution d'un adjectif épithète (intersectif) est un prédicat ($\langle e,t\rangle$). Si on considère que les adjectifs sont adjoints au N', comment définir les règles de composition pour que le N' le plus élevé soit bien du type $\langle e,t\rangle$?

6. Comment représenter la composition sémantique pour « Jean ne dort pas » ?
7. Vérifier que les choix faits jusqu'à présent permettent de calculer la représentation sémantique de (7-a), pour l'un de ses interprétations. Même question avec (7-b). Vérifier que le phénomène de « montée de la négation » pose un problème de compositionalité en faisant le même calcul pour (7-c).

   (7) a. Tous les enfants voient une balle
   b. Un étudiants ne répondit pas à toutes les questions
   c. Tous les invités ne viennent pas

8. La coordination en *et* peut s'appliquer à de multiples niveaux en français. Peut-on proposer une représentation de *et* qui fonctionne dans les cas suivants ?

   (8) a. Paul est paresseux et menteur
   b. Jean et Marie dorment
   c. Jean viendra et Marie est contente
   d. Paul regarde et admire Marie

9. La formule logique compositionnellement associée à (9-a) est, avec les définitions actuelles, (9-b). Redéfinir les λ-expressions associées aux niveaux V et SV pour que le calcul compositionnel donne (systématiquement) la formule (9-c) (en d'autre termes pour que la portée du *SN* dans le *SV* soit systématiquement large par rapport à celle du *SN* sujet).

   (9) a. Tous les hommes aiment une femme
   b. $\forall y(Hy \rightarrow \exists x(Fx \wedge Ayx))$
   c. $\exists x(Fx \wedge \forall y(Hy \rightarrow Ayx))$

10. (a) Donner les représentations "lexicales" et le détail des combinaisons pertinentes pour la phrase *un chat ronfle*.
    (b) La représentation de *le chat ronfle*, d'après Russel, est (10). Quelle λ-expression faut-il associer à *le* pour produire ce résultat ?

    (10) $\exists x$ (chat$(x) \wedge \forall y$ (chat$(y) \rightarrow y = x) \wedge$ ronfle(x))

    (c) Considérons maintenant la phrase (11) et son arbre syntaxique. Indiquer, pour chaque nœud du sous-arbre de racine N$'$, le type qu'il doit avoir pour que N$'$ soit de type $\langle e, t\rangle$.

    (11) Le chat qui dort ronfle

    (d) On suppose que la représentation de cette phrase est (12). Quelle λ-expression doit-on associer à *qui* pour produire un tel résultat ?

    (12) $\exists x$ (chat$(x) \wedge$ dort$(x) \wedge \forall y$ ((chat$(y) \wedge$ dort$(y)) \rightarrow y = x) \wedge$ ronfle(x))

    (e) La représentation précédente suppose que l'on a affaire à une relative *restrictive*. Comment pourrait-on prendre en compte le cas d'une relative *appositive*, comme dans : *le chat, qui dort, ronfle* (en agissant éventuellement au niveau de la grammaire) ?